

# INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

*Série des documents de travail  
de la Direction des Études et Synthèses Économiques*

**G 2002 / 08**

**Réflexions sur les différentes notions  
de volume dans les comptes nationaux :  
comptes aux prix d'une année fixe ou aux prix  
de l'année précédente, séries chaînées**

Jean-Pierre BERTHIER \*

JUIN 2002

---

\* Ce document reprend des travaux qui ont été pour l'essentiel réalisés alors que l'auteur était en poste au Département des Comptes Nationaux de l'Insee. Il a été finalisé après son arrivée à la Division Agriculture.

## Réflexions sur les différentes notions de volume dans les comptes nationaux : comptes aux prix d'une année fixe ou aux prix de l'année précédente, séries chaînées

### Résumé

Les Comptes Nationaux français ont une longue expérience du calcul des volumes à la fois aux prix d'une année fixe et aux prix de l'année précédente. Dans un premier temps, cette expérience est décrite, et la mise en avant des séries chaînées par la base 95 est analysée. Dans un deuxième temps, deux problèmes font l'objet d'une analyse théorique, mais aussi concrète à partir de séries tirées des comptes nationaux français.

Le premier concerne l'origine des écarts entre les évolutions des deux sortes de volume. A partir d'une démarche axiomatique, on définit la contribution de chaque composante à cet écart, pour un agrégat donné. Cette méthode est ensuite appliquée à différentes séries. L'analyse des résultats permet une meilleure compréhension de ces écarts et peut favoriser un contrôle de la qualité des différentes séries.

Le deuxième traite de la pertinence du chaînage. Dans le prolongement de la philosophie du SCN 93, on propose une méthode concrète pour analyser la pertinence qu'il y a à chaîner une série donnée. Appliquée à différentes séries des comptes français, cette méthode confirme largement la pertinence du chaînage mais en fixe aussi les limites.

**Mots-clés** : Comptes nationaux, prix d'une année fixe, prix de l'année précédente, chaînage

---

## Consideration on different sorts of volume in national accounts: accounts at fixed year prices or at the previous year prices, chained series

### Abstract

French National Accounts have a long experience of calculation of volumes both at fixed year prices and at the previous year prices. This experience is described in a first time, and the fact that the chained series are preferred in base 95 is discussed. Then, two questions are analysed on a theoretical point of view, but also in concrete terms from French series.

The first one deals with the explanation of the discrepancy between evolutions of the two kinds of volume. Based on an axiomatic approach, a measure of the part which comes from each component of a given aggregate is proposed. This method is then applied on different French series. The analyse of the results enables a better comprehension of this discrepancies and can help to control the quality of the different series.

The second one deals with the relevance of chained series. Directly related to the philosophy of the SNA 93, a concrete method is proposed to analyse the relevance of chaining for a given serie. Applied on different French aggregates, the method broadly confirms the relevance of chaining but, also, defines its limits.

**Keywords**: National accounts, fixed year prices, previous year prices, chaining

**Classification JEL** : E31

## Sommaire

<b>I - Introduction .....</b>	<b>5</b>
<b>II - Comptes en volume au prix d'une année fixe et aux prix de l'année précédente .....</b>	<b>6</b>
<i>II.1 Le problème général des séries en volume dans les comptes nationaux</i>	6
<i>II.2 De la Base 80 [4] à la Base 95 [5] : la mise en avant des séries chaînées</i>	7
<i>II.3 Les écarts entre séries chaînées et séries à prix constants, bien que souvent modestes, ne sont pas négligeables.</i>	8
<i>II.4 Nécessité d'explicitier les écarts entre les deux méthodes</i>	10
<b>III - Contributions aux écarts entre évolutions des volumes à prix constants et aux prix de l'année précédente .....</b>	<b>11</b>
<i>III.1 Pondérations implicites dans les comptes nationaux</i>	11
<i>III.2 Définition de contributions à l'écart entre deux moyennes pondérées</i>	12
<i>III.3 Retour au problème des comptes</i>	15
<i>III.4 Les facteurs d'écarts entre les évolutions aux prix de 80 et aux prix de l'année précédente</i>	16
<b>IV - La pertinence du chaînage .....</b>	<b>19</b>
<i>IV.1 Comment apprécier la pertinence du chaînage ?</i>	19
<i>IV.2 Appliquée aux données de la base 95, cette méthode confirme largement la pertinence du chaînage intégral mais en fixe les limites.</i>	22
<i>IV.3 Le cas particulier du solde extérieur et des variations de stocks</i>	25
<i>IV.4 Le problème du chaînage des séries agricoles</i>	30
<b>V - Bibliographie.....</b>	<b>33</b>
<b>VI - ANNEXE : Démonstration du résultat indiqué au point II 2 ....</b>	<b>35</b>



## I - Introduction

Pour l'ensemble des biens et services, les comptes en volume représentent la finalité principale du comptable national, quelles que soient les difficultés spécifiques du partage volume-prix : prise en compte de l'effet qualité pour les biens de haute technologie, difficulté à mesurer une évolution de prix pour certains services, en particulier aux entreprises, problèmes conceptuels et résultats parfois erratiques du partage volume-prix des services d'assurance, problème des services non marchands, etc.

Dans un autre registre, le fait qu'il existe deux types de comptes en volume, comptes aux prix d'une année fixe (souvent appelés « à prix constants ») et comptes aux prix de l'année précédente, éventuellement chaînés, soulève aussi de nombreuses questions :

- les écarts entre les deux types de volume sont-ils importants ?
- quels sont leurs problèmes d'utilisation respectifs ?
- quelle est la pertinence de chacun des deux types de séries ?
- quelle politique de diffusion adopter ?

Ce document vise à éclairer ces questions à partir de l'expérience française. Celle-ci est assez importante puisque les comptables nationaux calculent depuis longtemps des comptes en volume à la fois à prix constants et aux prix de l'année précédente.

Le premier chapitre, après quelques considérations générales, présente la philosophie qui a présidé en la matière au passage de la base 80 à la base 95. A partir du constat des écarts entre les évolutions dans les deux systèmes de prix et des problèmes qu'ils posent, ce chapitre vise aussi à éclairer l'enjeu des choix à effectuer.

Il fait émerger en particulier deux types de problèmes auxquels les chapitres 2 et 3 essaient d'apporter certaines réponses originales :

- Le chapitre 2 s'attache à mieux comprendre la nature et la provenance des écarts entre les évolutions à prix constants et celles aux prix de l'année précédente. Pour cela, il propose de définir une « contribution » des différentes composantes (produits ou activités par exemple) à l'écart constaté sur un agrégat donné. Cette méthode est ensuite appliquée concrètement à différents exemples tirés des comptes français.
- Le chapitre 3 tente tout d'abord de préciser la justification et les limites du chaînage, lesquelles sont habituellement formulées de façon qualitative. Le mode opératoire qui est proposé ici pour juger concrètement de la pertinence du chaînage sur une série donnée est ensuite appliqué à des séries très diverses des comptes français.

Le présent document reprend pour l'essentiel des travaux effectués au département des comptes nationaux (entre 1996 et 2000) et qui ont notamment donné lieu à des présentations lors des septième et huitième colloques de l'ACN (cf. [1] et [2]). Sa mise en forme et la partie relative au chaînage des séries fines de production de l'agriculture et de l'industrie ont été effectuées en 2001 à la division agriculture.

## **II - Comptes en volume au prix d'une année fixe et aux prix de l'année précédente**

### ***II.1 Le problème général des séries en volume dans les comptes nationaux***

Au-delà de toutes les difficultés pratiques et méthodologiques, l'établissement des indicateurs en volume pose en amont un problème de définition du "volume". On distingue classiquement deux notions de "volume", qui sans être fondamentalement différentes correspondent à des exigences et des propriétés différentes et donnent des résultats généralement voisins mais différents.

#### **a) Le volume aux prix de l'année précédente**

Si l'on s'intéresse à l'évolution "en volume" d'un agrégat (consommation par exemple) entre les années  $n$  et  $(n-1)$ , le plus naturel est de figer les prix au niveau de l'année  $n-1$ , le plus souvent en déflatant les "valeurs" nominales par les indices de prix  $n/n-1$ . On obtient ainsi des évolutions en volume au prix de l'année précédente pour chaque poste. L'agrégation se fait ensuite généralement en utilisant implicitement des indices de Laspeyres pour les volumes et de Paashe pour les prix, ce qui correspond au fait que le "volume" de l'agrégat est pris égal à la somme des volumes de ses composantes. On peut noter au passage que l'utilisation d'un indice Paashe pour l'agrégation des prix conduit à une évolution des prix à la consommation dans les comptes nationaux plus faible que celle de l'IPC, basée sur des indices de Laspeyres (cf. [3] en bibliographie).

Les utilisateurs des comptes nationaux ne peuvent cependant se contenter d'évolutions annuelles mais ont également besoin de séries plus ou moins longues. A partir de ce qui précède, on est donc amené pour chaque agrégat à chaîner les évolutions annuelles en volume, ou de façon équivalente à chaîner les évolutions de prix, de façon à obtenir des séries en volume base 100 pour une année donnée ou même des séries aux prix de référence de cette année.

#### **b) Le volume à prix constant**

Dans cette optique, on privilégie l'obtention directe de séries en volume en fixant les prix au niveau d'une année donnée, la même quelle que soit l'année dont on fait les comptes. L'évolution en "volume" d'un agrégat entre les années  $n-1$  et  $n$  est alors obtenue comme quotient des volumes (en montant ou en indice) de l'année  $n$  par l'année  $(n-1)$ .

#### **c) Eléments de comparaison et avantages respectifs**

Les séries obtenues dans les deux systèmes de prix et les évolutions annuelles (autres que celles de l'année qui suit l'année de référence) seront a priori différentes dès qu'il s'agit d'un agrégat et non pas d'une véritable série homogène pour laquelle le volume est assimilable à une simple quantité.

Dès lors, le problème du choix entre ces deux types d'indicateurs se trouve posé. En laissant de côté l'ensemble des problèmes pratiques de calcul et de disponibilité des données, on peut brièvement souligner les points suivants :

- les séries chaînées tiennent compte de l'évolution de la structure de l'économie, en particulier de la déformation des prix relatifs, laquelle est importante pour certains produits (informatique, énergie).
- en contrepartie, le chaînage des séries détruit, pour des raisons purement mathématiques, les équations comptables. Ceci provient du fait que si pour chaque année on a  $z = x + y$ , en chaînant les évolutions, on n'a plus l'égalité  $ch(z) = ch(x) + ch(y)$ . Les comptes ne sont alors plus équilibrés (ou additifs, suivant la terminologie employée).

Ce dernier point peut naturellement conduire à de sérieuses difficultés pour certains utilisateurs, en particulier pour les modélisateurs macro-économiques. Ceux-ci sont en effet habitués à utiliser les équations comptables dans leurs modèles, ainsi qu'à additionner les agrégats. Le fait que ce ne soit plus possible avec les séries chaînées constitue une critique fondamentale. Mais en réponse, les adeptes des séries chaînées peuvent avancer plusieurs remarques :

- il peut être digne d'intérêt d'étudier l'évolution d'un agrégat indépendamment de tout équilibre comptable. Par exemple, il semble tout à fait légitime de s'intéresser à la consommation des ménages sur longue période, de façon simplement descriptive. Dans ce cas, il serait dommage de ne pas pouvoir disposer de la série jugée la meilleure, prise isolément.
- certains modèles macro-économiques sont établis uniquement à partir d'équations faisant intervenir les taux de croissance. Si la réalisation de tels modèles est délicate, il est par contre séduisant de penser que tout utilisateur, à partir de comptes chaînés non équilibrés, peut lui-même restaurer les équilibres comptables en ventilant les écarts de chaînage de façon à épargner au mieux les séries représentant le cœur de son domaine d'étude. Par exemple, un modèle destiné à examiner le commerce extérieur sera établi en préservant le chaînage des séries d'exportations et d'importations. Mais on peut par contre estimer que c'est beaucoup demander à l'utilisateur...

Le chaînage pose par ailleurs un problème spécifique dans l'établissement des comptes trimestriels. L'établissement de comptes aux prix du trimestre précédent semble hors de portée. Aussi, les adeptes du chaînage envisagent habituellement des comptes trimestriels aux prix (moyens) de l'année précédente. Mais il s'ensuit une certaine discontinuité dans le passage du 4ème trimestre d'une année au 1er trimestre de l'année suivante. Face à ces difficultés, les comptables trimestriels français continuent à calculer des comptes à prix constants. De plus, la technique qu'ils emploient « d'étalonnage » et de calage sur les séries des comptes annuels est plus adaptée avec des séries annuelles à prix constants.

## ***II.2 De la Base 80 [4] à la Base 95 [5] : la mise en avant des séries chaînées***

Dans notre ancienne base (dite « base 80 ») les comptes en volume étaient publiés à la fois aux prix de l'année précédente et aux prix de 1980. Le chaînage des évolutions aux prix de l'année précédente n'était pas réalisé et laissé à la charge de l'utilisateur. Implicitement, le rôle principal des comptes aux prix de l'année précédente n'était pas de déboucher sur des séries chaînées. Mais ce rôle était néanmoins double :

- d'une part, ces comptes permettaient de fournir pour chaque agrégat la meilleure mesure possible de son évolution d'une année sur l'autre. Ainsi, la croissance économique commentée dans la publication officielle sur le compte provisoire (première évaluation complète des comptes de l'année écoulée) était exprimée aux prix de l'année précédente ;

- d'autre part, ils constituaient une étape pour calculer les comptes aux prix de 1980. En effet, ceux-ci étaient établis à partir du chaînage des différentes séries des équilibres ressources-emplois par produits, au niveau le plus fin possible (en général au niveau 600). Ces comptes n'étaient donc, en réalité, des comptes à prix constants que dans la mesure où les séries chaînées pouvaient être considérées comme des séries élémentaires homogènes, ce qui n'était qu'une approximation.

Il convient de noter ici que si la technique du chaînage était mise en oeuvre au niveau détaillé, la France ne réalisait pas pour autant de comptes chaînés aux niveaux plus agrégés, ce qui a pu être parfois source de confusion. Le niveau auquel on chaîne est en effet essentiel en la matière :

- un chaînage au niveau le plus fin possible, suivi d'une agrégation, correspond (comme en base 80) à une technique de réalisation de comptes à prix constants;
- l'établissement de comptes aux prix de l'année précédente chaînés passe au contraire par le chaînage des agrégats à tous les niveaux de nomenclature, en particulier (et c'est là que réside principalement l'intérêt de cette méthode) à un niveau très agrégé, à commencer par le PIB et ses principales composantes. Le chaînage doit aussi s'appliquer à toutes sortes de séries, comme la consommation en produits manufacturés par exemple.

Avec la base 95, les comptables annuels français ont mis l'accent sur le calcul et la diffusion des séries chaînées, sans pour autant créer une véritable rupture avec la pratique de la base 80 :

- les séries publiées (sur papier et le site Internet) sont les séries chaînées, aux différents niveaux de nomenclature (séries aux prix de l'année précédente chaînées, en francs 95). En cela la France se situe dans la logique du SCN93 [6] et du SEC95 [7] qui privilégient les séries chaînées.
- des comptes aux prix de 1995 sont néanmoins calculés et rendus publics pour tenir compte du souhait des utilisateurs français. Il s'agit cependant de « pseudo » prix constants dans la mesure où ils résultent du chaînage du tableau entrées-sorties en 118 postes puis d'un équilibrage, et enfin d'agrégations purement additives. Le niveau 118 représente le niveau le plus fin auquel un tel chaînage peut être effectué de manière automatique. A ce niveau, les séries sont cependant loin de pouvoir être considérées comme homogènes. Quant à l'équilibrage, il est réalisé en reportant pour chaque produit l'écart de chaînage sur les variations de stocks ou à défaut sur la production. Ce choix correspond au fait que, dans les méthodes des comptes trimestriels, les variations de stocks sont évaluées par solde de l'équilibre.

Il est vrai que le fait de mettre en avant des comptes non équilibrés, tout en offrant par ailleurs des comptes équilibrés, ne simplifie ni la tâche des utilisateurs, ni celle des producteurs-diffuseurs. Et l'utilisateur peut à bon droit se demander si l'on n'a pas accordé une place trop importante à une question certes intéressante sur un plan théorique, mais qui ne comporte pas de véritable enjeu quant à la qualité des chiffres publiés. Le constat qui suit fournit des éléments de réponse nuancés mais montre que dans certains cas l'apport du chaînage peut être important.

### ***II.3 Les écarts entre séries chaînées et séries à prix constants, bien que souvent modestes, ne sont pas négligeables.***

Pour étudier quantitativement les écarts entre les deux systèmes de prix, on se basera sur les comptes de la base 80. Ce choix est avant tout justifié par le fait que les comptes à prix constants de cette base sont beaucoup plus proches de véritables comptes à prix constants que ne le sont ceux de la base 95 (cf. supra).

En base 80, les années récentes étaient calculées à prix 80 et donc avec une structure de prix qui datait de plus de 15 ans. Une idée souvent avancée est que le fait de changer tous les cinq ans d'année de référence de prix, comme il est prévu de le faire en base 95, supprime l'essentiel des écarts que l'on peut constater entre les évolutions dans les différents systèmes de prix. Ceci est vrai lorsque l'on s'intéresse à l'évolution économique des années récentes, et en cela cette actualisation de la référence des prix est très souhaitable. Mais il n'en demeure pas moins que, quelle que soit l'année de référence des prix, lorsque l'on utilise un agrégat sur longue période (20 ans par exemple), les années extrêmes sont calculées avec une même structure de prix alors qu'elles correspondent à des structures de l'économie éloignées de 20 ans. Ici, le chaînage est a priori la seule réponse possible.

Le tableau ci-après indique pour quelques séries les écarts constatés, en base 80, entre les taux d'évolutions dans les deux systèmes de prix (dans les séries chaînées, les évolutions d'une année sur l'autre sont par construction égales aux évolutions obtenues dans les comptes aux prix de l'année précédente, notées ici « prix n-1 »).

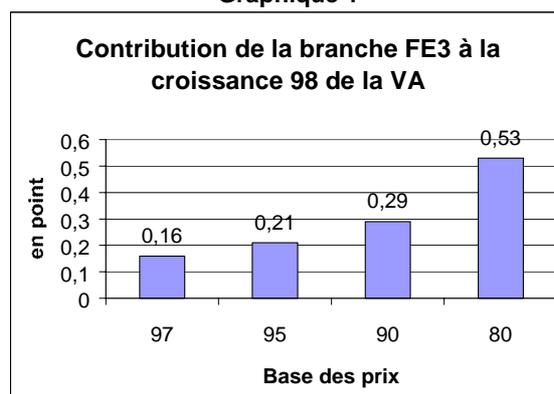
**Tableau 1 : Evolutions aux prix 80 et aux prix de l'année précédente**

n	Produit intérieur brut			FBCF des sociétés (non financières) et entreprises indiv.			Consommation d'énergie (intermédiaire et finale)			Importations de biens d'équipement professionnels		
	% prix n-1	% prix 80	Ecart en point	% prix n-1	% prix 80	Ecart en point	% prix n-1	% prix 80	Ecart en point	% prix n-1	% prix 80	Ecart en point
1981	1,2	1,2	0	-2,9	-2,9	0,0	-6,8	-6,8	0,0	1,4	1,4	0,0
1982	2,5	2,5	0	0,0	-0,1	-0,1	-4,9	-4,4	0,5	7,9	7,6	-0,3
1983	0,8	0,7	-0,1	-4,2	-4,4	-0,2	-2,1	-1,9	0,2	-2,4	-2,5	-0,1
1984	1,5	1,3	-0,2	-2,6	-2,8	-0,2	2,3	2,4	0,1	1,3	1,1	-0,2
1985	1,8	1,9	0,1	4,5	4,3	-0,2	0,9	1,5	0,6	6,7	6,7	0,0
1986	2,4	2,5	0,1	6,4	6,3	-0,1	0,7	0,7	0,0	6,5	7,2	0,7
1987	2,2	2,3	0,1	5,9	5,9	0,0	1,1	0,8	-0,3	11,7	11,1	-0,6
1988	4,3	4,5	0,2	9,6	9,5	-0,1	1,1	1,4	0,3	20,1	19,3	-0,8
1989	3,9	4,3	0,4	8,5	9,0	0,5	2,1	1,9	-0,2	10,3	9,7	-0,6
1990	2,4	2,5	0,1	4,4	4,4	0,0	1,5	1,6	0,1	9,1	9,2	0,1
1991	0,8	0,8	0	-0,1	0,1	0,2	4,4	4,7	0,3	4,5	4,5	0,0
1992	1,0	1,2	0,2	-2,1	-1,6	0,5	0,1	-0,1	-0,2	-3,0	-2,7	0,3
1993	-1,3	-1,3	0	-8,4	-8,1	0,3	0,0	0,2	0,2	-7,7	-7,2	0,5
1994	2,6	2,8	0,2	1,3	1,7	0,4	-0,4	-0,4	0,0	7,4	7,0	-0,4
1995	2,0	2,1	0,1	3,1	3,3	0,2	1,4	1,3	-0,1	11,1	12,5	1,4
1996	1,3	1,6	0,3	0,4	0,6	0,2	3,0	3,6	0,6	6,5	7,1	0,6
1997	2,2	2,3	0,1	-0,1	-0,1	0,0	0,3	0,4	0,1	14,7	13,6	-1,1

Entre les deux systèmes de prix, la différence de mesure dans l'évolution du PIB est relativement faible, sans être négligeable. Elle est couramment de 0.2 point et atteint 0.3 (en 1996) ou 0.4 point (en 1989). L'impact de l'année de référence des prix est plus important pour la formation brute de capital fixe des entreprises, en atteignant plusieurs fois le demi-point de croissance. Pour la consommation d'énergie, l'écart atteint 2 fois 0.6 point. Enfin, le système de prix de référence est important pour les importations de biens d'équipement professionnels pour lesquels l'écart se situe 2 fois entre 1 point et 1 ½ point et de nombreuses fois entre ½ point et 1 point.

Certaines analyses plus structurelles dépendent plus fortement de la base de prix retenue. Le graphique 1 retrace, en base 95, la contribution de la branche « Industries des équipements électriques et électroniques » (FE3) à la croissance de la valeur ajoutée en 1998. Cette contribution augmente rapidement lorsque la base des prix vieillit, passant de 0,16 point aux prix de l'année précédente à 0,21 aux prix de 1995 pour atteindre 0,53 aux prix de 1980.

Graphique 1



#### ***II.4 Nécessité d'explicitier les écarts entre les deux méthodes***

L'écart entre la croissance du PIB aux prix de 80 et aux prix de l'année précédente a atteint 3 dixièmes de point (0.3 point) lors de l'établissement du compte 1996 Provisoire. L'origine de cet écart est avant tout liée aux évolutions contrastées des prix relatifs. Son ampleur ne paraît a priori pas anormale étant donné l'éloignement de l'année de référence (1980) et l'évolution de structure que l'économie française a connue depuis : développement très important par exemple de l'informatique avec une baisse très marquée de ses prix relatifs par rapport au reste de l'économie. Cependant cet écart est apparu inhabituellement élevé et a suscité de nombreuses questions.

Il oblige à effectuer un délicat travail d'explication vis à vis des médias. En effet la première estimation de la croissance est effectuée à l'INSEE par les comptes trimestriels sur la base de prix 80, alors que quelques mois plus tard les comptes annuels publient à la fois un chiffre à prix 80, homogène avec le précédent, et un chiffre au prix de l'année précédente, a priori préférable mais non comparable avec celui des comptes trimestriels.

La publication du compte provisoire 96 a de ce point de vue été particulièrement difficile puisqu'à l'importance de l'écart entre les deux indices s'est ajouté le problème des positions respectives des trois valeurs en cause. C'est ainsi que dans la première publication de fin de comptes (Insee Première N° 519), l'annonce d'une croissance en volume (au prix de l'année précédente) de 1,2 % a dû être accompagnée du renvoi suivant :

"Tous les volumes sont ici exprimés aux prix de l'année précédente. Les volumes des comptes annuels peuvent aussi être mesurés aux prix de 1980, comme dans les comptes trimestriels. La croissance du PIB aux prix de 1980 est alors un peu plus élevée : 1,5 % ; seul ce dernier chiffre est à comparer à la première estimation de l'année 1996 (1,3 %), estimation qui avait été donnée lors de la publication des comptes trimestriels du quatrième trimestre 1996".

C'est dire que l'estimation de la croissance, en passant de 1,3 % (à prix 80) à 1,2 % (aux prix de 95), a été corrigée de 0,2 point à la hausse et non de 0,1 point à la baisse !

### III - Contributions aux écarts entre évolutions des volumes à prix constants et aux prix de l'année précédente

On prendra ici comme exemple de volumes à prix constants, ceux à prix 80 (base 80). Ce choix (qui s'imposait au moment de l'étude) ne restreint en rien l'analyse théorique et permet de présenter des résultats numériques plus intéressants que ne l'aurait permis l'utilisation des séries de la base 95 pour des raisons indiquées dans la première partie.

#### III.1 Pondérations implicites dans les comptes nationaux

Un agrégat des comptes nationaux peut être décomposé comme somme (éventuellement algébrique) de différentes composantes, en général de différentes façons.

Exemple 1 : FBCF décomposée par produits, à un certain niveau de la nomenclature, ou par secteurs institutionnels.

Exemple 2 : PIB décomposé comme somme des valeurs ajoutées des branches (plus TVA et droits de douane) ou comme somme des emplois finals (en comptant négativement les importations).

Un agrégat et l'une de ses décompositions étant choisie, considérons l'une de ses composantes  $i$  et notons :

$VA_{i,a}$  la valeur de  $i$  pour l'année  $a$

$VO_{i,a}$  le volume au prix de l'année précédente de  $i$  pour l'année  $a$

$PC_{i,a}$  le volume au prix de 80 de  $i$  pour l'année  $a$ .

La croissance de l'agrégat pour une année  $n$  aux prix de  $n-1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} R(n-1) &= \left[ \sum_i VO_{i,n} \right] / \left[ \sum_i VA_{i,n-1} \right] = \\ &= \sum_i \left[ VA_{i,n-1} \times VO_{i,n} / VA_{i,n-1} \right] / \sum_i VA_{i,n-1} \\ &= \sum_i \left[ VA_{i,n-1} / \sum_j VA_{j,n-1} \right] \left[ VO_{i,n} / VA_{i,n-1} \right] \end{aligned}$$

$R(n-1)$  peut donc s'écrire comme moyenne de la croissance en volume au prix de l'année précédente des différentes composantes, pondérée par leurs poids respectifs (éventuellement négatifs) dans le total de la valeur de l'année  $n-1$ . On retrouve ici un résultat classique (formule de Laspeyres).

La croissance de l'agrégat aux prix constants de 1980 entre  $(n-1)$  et  $n$  s'écrit :

$$R(80) = \sum_i PC_{i,n} / \sum_i PC_{i,n-1} = \sum_i \left[ PC_{i,n-1} / \sum_j PC_{j,n-1} \right] \left[ PC_{i,n} / PC_{i,n-1} \right]$$

$R(80)$  est donc égal à la moyenne de la croissance entre  $(n-1)$  et  $n$ , en volume au prix de l'année 80, des différentes composantes, pondérée par leurs poids respectifs

(éventuellement négatifs) dans le total du montant de l'agrégat de l'année (n-1) aux prix de l'année 80.

On peut noter que pour une composante "élémentaire" (niveau 600 pour les produits), on a  $VO_{i,n} / VA_{i,n-1} = PC_{i,n} / PC_{i,n-1}$ , du moins lorsque les prix constants sont effectivement calculés par chaînage des évolutions aux prix de l'année précédente. Entre R (n-1) et R (80) la différence provient alors en totalité du système de pondération (structure de l'économie en n-1 ou en 80). Mais à un niveau plus agrégé, les croissances des différentes composantes sont généralement différentes suivant les deux systèmes de prix.

On cherche ici à "expliquer" l'écart qu'il y a entre R (n-1) et R (80) en définissant des contributions relatives à chaque composante. Pour ce faire, il est finalement plus commode de se placer dans un cadre plus général que l'on pourra facilement appliquer aux comptes au vu de ce qui précède.

### **III.2 Définition de contributions à l'écart entre deux moyennes pondérées**

On se place ici dans le cadre suivant :

- soit  $a_i$  et  $b_i$  pour  $i=1$  à  $n$  deux systèmes de pondérations associés à des évolutions  $r_i(a)$  et  $r_i(b)$ . Le terme « évolutions » est introduit ici pour faciliter la compréhension, mais ne suppose en fait aucune propriété (il s'agit de nombres réels quelconques). Les  $a_i$  et  $b_i$  sont des nombres réels (et peuvent donc être négatifs) dont les sommes respectives sont égales à 1 (les pondérations sont normées).

- on note R(a) et R(b) les moyennes des  $r_i(a)$  et  $r_i(b)$  pondérées respectivement par les  $a_i$  et les  $b_i$ . Si les  $r_i$  sont effectivement des évolutions, alors les R représentent les évolutions globales dans les systèmes a ou b.

On a ainsi :

$$\sum_i a_i = \sum_i b_i = 1 \quad (a_i \text{ et } b_i \text{ peuvent être négatifs})$$

et

$$\sum_i a_i r_i(a) = R(a) \quad \text{et} \quad \sum_i b_i r_i(b) = R(b)$$

On cherche à définir la « contribution » de la composante  $i$  à l'écart  $E = R(b) - R(a)$ .

Comme exemple concret on peut prendre la FBCF ventilée en produits, avec :

-  $i$  de 1 à  $n$  représentant la nomenclature retenue pour les produits;

-  $r_i(a)$  (resp.  $r_i(b)$ ) la croissance du volume de la FBCF en produit  $i$  au cours d'une année, exprimée aux prix de l'année précédente (resp. aux prix de l'année 80);

- R(a) et R(b) représentent alors les croissances du volume de la FBCF totale dans les deux systèmes de prix.

Pour définir la **notion de contribution**, on pose la définition suivante :

**Définition** : on appelle fonction de contributions toute fonction continue qui à  $i$  associe

$C_i = f(n, a_i, b_i, r_i(a), r_i(b), a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n, r_1(a), \dots, r_{i-1}(a), r_{i+1}(a), \dots, r_n(a), r_1(b), \dots, r_{i-1}(b), r_{i+1}(b), \dots, r_n(b))$  vérifiant les hypothèses (1) à (5) indiquées ci-après.

Commentaire : la fonction  $f$  est donc une fonction (continue) des 4 paramètres caractérisant la composante  $i$ , ainsi que des  $4(n-1)$  paramètres caractérisant les autres composantes. Au total, c'est une fonction des  $4n$  paramètres de notre problème ( $4n-2$  paramètres indépendants puisque la somme des  $a_i$  et celle des  $b_i$  sont égales à 1).

**(1) Propriété d'exhaustivité** : la somme des contributions des différentes composantes est égale à l'écart global  $R(b) - R(a)$ .

Commentaire : si l'on veut interpréter la contribution de la composante  $i$  comme la part de l'écart global « expliquée » par cette composante, il faut que (1) soit vérifiée.

**(2) Propriété d'agrégativité interne** : dans le calcul de  $C_i$ , on peut remplacer deux autres composantes  $j$  et  $k$  par une seule  $h$  dont les poids  $a_h$  et  $b_h$  sont égaux à la somme des poids de  $j$  et  $k$ , et dont les évolutions  $r_h(a)$  et  $r_h(b)$  sont les moyennes des  $r_j$  et  $r_k$  pondérées par les poids des composantes  $j$  et  $k$  (on dira par la suite que  $h$  est l'**agrégation** de  $j$  et  $k$ ).

Commentaire : (2) signifie par exemple que la contribution de l'informatique à l'écart sur la FBCF globale ne dépend pas du fait de décomposer ou non, dans la nomenclature retenue, la construction entre bâtiment et travaux publics.

On emploie ici le terme d'agrégativité interne par opposition à l'**agrégativité externe** que l'on définit par la propriété suivante : si  $h$  est l'agrégation de  $j$  et  $k$ , alors  $C_h = C_j + C_k$ . On montre dans l'annexe que le respect des propriétés (1) et (2) entraîne cette propriété.

**(3) Propriété de symétrie** : si l'on intervertit les deux systèmes  $a$  et  $b$  (c'est à dire si l'on intervertit les  $a_j$  avec les  $b_j$  et les  $r_j(a)$  avec les  $r_j(b)$ ), alors les  $C_i$  changent de signe sans changer de valeur absolue.

Commentaire : l'écart  $E$  à « expliquer » devenant  $-E$ , cette propriété signifie bien que les deux systèmes  $a$  et  $b$  jouent des rôles symétriques et qu'il est indifférent de vouloir expliquer l'écart de  $a$  vers  $b$  ou celui de  $b$  vers  $a$ .

**(4) Propriété d'échelle** : si toutes les évolutions  $r_j(a)$  et  $r_j(b)$  sont multipliées par un même facteur (nombre réel), alors toutes les contributions  $C_i$  sont également multipliées par ce même facteur.

Commentaire : cette propriété assure l'indépendance de la notion de contribution à l'unité retenue. Par exemple, si les évolutions sont exprimées en points et qu'une contribution vaut 0.5 (point), alors les mêmes calculs repris en exprimant les évolutions en dixièmes de point conduiront à une contribution de 5 (dixièmes de point).

**(5) Propriété de translation** : si toutes les évolutions  $r_j(a)$  et  $r_j(b)$  sont augmentées d'un même terme (nombre réel), alors les contributions restent inchangées.

Commentaire : cette propriété semble logique dès lors que l'on ne s'intéresse qu'aux écarts d'évolution. Elle assure par exemple que les contributions calculées ne dépendent pas du fait de considérer les évolutions en taux de croissance (par exemple 0.02) ou en indice (1.02).

En combinant (4) et (5), on peut donc indifféremment introduire les évolutions sous la forme 102, 1.02, 0.02 ou 2.

Le résultat suivant, dont la démonstration est donnée en annexe, permet de définir concrètement une **formule de calcul des contributions** :

Il existe une et une seule fonction de contribution et elle s'écrit

$$C_i = b_i (r_i(b)-R) - a_i (r_i(a)-R) \text{ avec } R = \frac{1}{2} (R(a)+R(b))$$

Ci est appelé contribution de la composante i à l'écart E.

Par ailleurs, **les hypothèses (1) à (5) ne sont pas redondantes** : l'une quelconque de ces propriétés étant choisie, il existe une fonction vérifiant les 4 autres mais ne vérifiant pas celle-là.

Ne vérifiant pas (1) mais les 4 autres : il suffit de prendre  $\alpha C_i$  avec  $\alpha \neq 1$  ( $C_i$  étant défini au 2.);

Ne vérifiant pas (2) mais les 4 autres : on peut prendre  $C_i$  en remplaçant R par  $\frac{1}{2} (R'(a) + R'(b))$  où

$$R'(a) = (\sum a_i^2 r_i(a)) / \sum a_i^2 \text{ et de même pour } R'(b);$$

Ne vérifiant pas (3) mais les 4 autres : on peut prendre  $C_i$  en remplaçant R par R(a);

Ne vérifiant pas (4) mais les 4 autres : on peut prendre  $C_i$  en remplaçant R par  $R \cdot \beta$  avec  $\beta \neq 0$

Ne vérifiant pas (5) mais les 4 autres : on peut prendre  $C_i$  en remplaçant R par  $(R(a) \cdot R(b))^{1/2}$ .

La propriété (5) permet donc d'assurer l'unicité de la fonction recherchée en écartant des fonctions proches de celle retenue (indiquée précédemment). Mais cette propriété, combinée aux 4 autres, assure aussi une propriété importante, que l'on notera (6) : si les évolutions des différentes composantes sont égales entre elles et égales dans les deux systèmes a et b, alors toutes les contributions sont nulles. Cette propriété semble nécessaire puisque l'uniformité de toutes les évolutions signifie que les différentes composantes ne correspondent qu'à une question de terminologie et non pas à des différences de comportement, alors que par ailleurs l'écart global est nul. En d'autres termes, peu importe pour notre problème la dénomination des choses s'il n'y a pas de « gradient » dans l'économie.

L'expression indiquée précédemment, obtenue en remplaçant R par  $(R(a) \cdot R(b))^{1/2}$ , ne vérifie pas (5) mais respecte (6). Par contre, l'expression  $C_i = b_i r_i(b) - a_i r_i(a)$ , qui peut paraître naturelle puisqu'elle résulte de la différence des termes liés à la composante i dans le calcul de R(b) et R(a), vérifie les propriétés (1) à (4) mais ne vérifie ni (5) ni (6).

Partant de l'expression retenue  $C_i = b_i (r_i(b)-R) - a_i (r_i(a)-R)$  avec  $R = \frac{1}{2} (R(a)+R(b))$  on peut s'intéresser au **cas particulier où  $r_i(a) = r_i(b)$** . Seul le système de pondération change alors entre les systèmes a et b et l'on a :

$$C_i = b_i [r_i - R] - a_i [r_i - R]$$

Soit :

$$C_i = (b_i - a_i) (r_i - R) \text{ où } R \text{ est l'évolution moyenne globale}$$

L'interprétation des contributions est alors plus facile : les contributions positives lorsque l'on passe de a à b correspondent à des composantes à taux de croissance

plus fort que la moyenne et dont le poids relatif est plus élevé en b qu'en a, ou bien à taux de croissance plus faible que la moyenne et dont le poids relatif est plus faible en b qu'en a. Les cas de contributions négatives s'expriment de façon analogue. Une contribution est nulle lorsque le poids relatif de la composante ne change pas ( $a_i = b_i$ ) ou lorsque sa croissance se situe dans la moyenne (des autres ou globale).

### **III.3 Retour au problème des comptes**

Les formules et propriétés du paragraphe 2 s'appliquent au paragraphe 1 en considérant que:

. le système a représente les prix (n-1) :

$$r_i (a) = VO_{i,n} / VA_{i,n-1} ;$$

$a_i$  est le poids de i dans le total de la valeur de l'agrégat de l'année n-1 ;

$$R (a) = R (n-1)$$

. le système b représente les prix 80 :

$$r_i (b) = PC_{i,n} / PC_{i,n-1} ;$$

$b_i$  est le poids de i dans le total du montant de l'agrégat de l'année n-1 au prix 80.

$$R (b) = R (80)$$

Le cas particulier  $r_i (a) = r_i (b)$  correspond a priori au cas où l'on raisonne au niveau 600 produits. Mais la formule simplifiée  $C_i = (b_i - a_i) (r_i - R)$  ne doit pas être utilisée à un niveau plus agrégé.

Par contre, la formule générale  $C_i (a, b) = b_i [r_i (b) - R] - a_i [r_i (a) - R]$  peut être appliquée à n'importe quel niveau de nomenclature et assure que les contributions à un niveau agrégé s'obtiennent également comme somme des contributions des composantes de la nomenclature plus fine. Par exemple on aura :

. contribution de la FBCF à l'écart sur le PIB = Somme des contributions des FBCF des différents secteurs institutionnels ;

. contribution de la valeur ajoutée de la branche U03 = somme des contributions des branches T04, T05, et T06.

Enfin, le fait que les composantes peuvent être négatives permet :

. de décomposer le PIB à partir des emplois finals (eux-mêmes éventuellement décomposés par produits ou secteurs institutionnels) en pondérant négativement les imports et sans se soucier du signe des variations de stocks.

. de décomposer la valeur ajoutée de façon complète (valeur ajoutée négative de la "branche unité fictive").

En pratique, on privilégiera la décomposition du PIB en produits : à partir de l'écriture du PIB comme somme des emplois finals (moins les imports), eux-mêmes ventilés par produits (FBCF en matériel électrique par exemple), on regroupe les différents termes (emplois) relatifs à un même produit. La raison de ce choix tient au fait que l'évolution des prix relatifs qui est au cœur de notre problématique (cf. ci-après) est liée avant

tout aux produits. Dans cette décomposition aussi, certaines composantes (les produits largement importés) sont négatives.

### **III.4 Les facteurs d'écarts entre les évolutions aux prix de 80 et aux prix de l'année précédente**

En reprenant la formule simplifiée  $C_i = (b_i - a_i) (r_i - R)$ , on voit que les contributions, sous l'hypothèse que  $r_i(a) = r_i(b)$ , sont fonctions de deux facteurs :

- l'écart de croissance de l'année  $n/n-1$  par rapport à la croissance moyenne des différentes composantes ;
- l'écart entre les pondérations à prix 80 et à prix  $(n-1)$ . Ce point est à relier à l'évolution des prix relatifs depuis 1980 : un poids plus fort aux prix de 80 qu'aux prix de 95 signifie généralement que le prix relatif du produit a baissé sur la période. C'est le cas si l'on s'intéresse par exemple aux contributions des différents produits à l'écart constaté sur la FBCF totale. Lorsque l'on s'intéresse aux contributions des différents produits à l'écart sur le PIB, la question est un peu plus compliquée puisque le PIB étant égal à la somme des emplois finals moins les imports, les produits largement importés ont un poids négatif. Ainsi, les importations de pétrole brut rapportées au PIB étant supérieures à prix 80 qu'à prix 95, le poids (négatif) de ce produit est supérieur (moins négatif) à prix 95. Un prix relatif en baisse correspond alors à un poids plus fort à prix 95 bien que plus faible en valeur absolue.

Mais la décomposition en ces deux facteurs n'est exhaustive que sous l'hypothèse que  $r_i(a) = r_i(b)$  et la formule générale  $c_i(a, b) = b_i [r_i(b) - R] - a_i [r_i(a) - R]$  montre également qu'un écart entre les évolutions  $n/n-1$  des composantes dans les deux systèmes de prix ( $r_i(b)$  et  $r_i(a)$ ) influe sur les contributions. Pour examiner ce troisième facteur d'écart on peut transformer la formule ci-dessus de la façon suivante :

$$c_i(a, b) = (b_i - a_i) (r_i - R) + \frac{1}{2} (a_i + b_i) (r_i(b) - r_i(a)) \quad \text{avec } r_i = \frac{1}{2} (r_i(a) + r_i(b))$$

Le premier terme de la somme donnant  $c_i(a, b)$  traduit l'effet des deux facteurs indiqués précédemment (écart de croissance par rapport à la moyenne et écart de pondérations dans les deux systèmes de prix). Le deuxième terme représente l'impact du troisième facteur : l'écart des évolutions dans les deux systèmes de prix. Il montre que ce facteur, pour être important, doit combiner à la fois des évolutions sensiblement différentes et un poids élevé pour la composante concernée.

Ce troisième facteur apparaît le plus souvent relativement mineur. La décomposition du PIB comme somme des emplois finals moins les imports illustre, sur le compte 96 provisoire, cette question. L'écart entre les évolutions du PIB en volume selon les deux systèmes de prix étant de près de 3 dixièmes de point, on prendra dans ce qui suit le dixième de point comme unité.

- pour les imports, l'écart entre la croissance à prix 80 et celle à prix 95 est élevé (5 dixièmes de point) alors que leur contribution à l'écart sur le PIB est très faible (0.1 dixième de point);
- pour les exports, la situation est inversée : l'écart de croissance entre les deux systèmes de prix est faible (1 dixième) alors que leur contribution à l'écart sur le PIB est élevée (1.7 dixième de point).

	Exports	Imports
Ecart entre croissance	- 1	5
Contribution à l'écart sur le PIB	+ 1,67	+ 0,10

note : les contributions sont exprimées en  $1/10^{\text{ème}}$  de point

Ceci montre bien que la contribution n'est pas liée principalement à l'écart d'évolution entre les deux systèmes de prix, comme on peut être tenté de le penser en première analyse. Ce point n'est pas paradoxal puisque si l'on décompose le PIB en composantes suffisamment fines (niveau 600 en général), leur évolution aux prix de 80 est égale par construction à celle obtenue avec des prix de 95. Les écarts sur chaque composante sont alors nuls, indépendamment de l'écart que l'on constate sur l'agrégat, dont l'origine doit donc être recherchée ailleurs.

Même s'il est naturel de chercher dans un premier temps les postes (emplois ventilés éventuellement par produits) où se trouvent les plus gros écarts, cette recherche passe donc à côté de l'essentiel dans l'explication de l'écart au niveau du PIB.

Par ailleurs, lorsque l'on classe (en utilisant la formule complète) les produits au niveau 90 qui fournissent les plus fortes contributions à l'écart sur le PIB (où l'une de ses composantes) dans un tableau 2x2 croisant les deux premiers facteurs, on obtient généralement des contributions positives dans les premier et quatrième quadrans et négative dans les deuxième et troisième, conformément à ce que l'on obtiendrait avec la formule simplifiée (cf. tableaux suivants) :

#### Ecart sur le PIB - Principales contributions

Ecart total à expliquer 2.76	Poids plus fort à prix 80	Poids plus fort à prix 95
Croissance 96/95 plus forte que la moyenne	agriculture S01 (+1.19) informatique S27 (+0.69) pétrole raffiné S053 (+0.57)	pétrole brut S051 (-0.81) (importé)
Croissance 96/95 plus faible que la moyenne	conserves S37 (-0.54) construction S55 (-0.49)	métaux non ferreux S13(+0.36) (largement importés)

#### Ecart sur la FBCF - Principales contributions

Ecart total à expliquer 5.42	Prix relatifs en baisse (95 par rapport à 80)	Prix relatifs en hausse (95 par rapport à 80)
Croissance 96/95 plus forte que la moyenne	informatique S27 (+2.86) électron. prof. S291(+0.37)	automobile S311 (-0.40)
Croissance 96/95 plus faible que la moyenne	matériels divers S25(+1.33)	aéronautique S33 (+0.65) construction S55 (+0.49)

note : - les contributions sont exprimées en 1/10<sup>ème</sup> de point.

- la contribution de la construction, négative pour le PIB et positive pour la FBCF provient des prix relatifs entre 1980 et 1995. En ce qui concerne la FBCF, les prix de la construction évoluent légèrement plus vite que le total de l'économie ; par contre pour le PIB, les prix de la construction évoluent presque comme ceux de la FBCF en construction (la FBCF étant prépondérante dans les emplois) alors que les prix évoluent sensiblement plus vite dans le total de l'économie. En définitive, cette apparente contradiction tient donc au fait que les prix de la construction évoluent "vites" si on les considère comme FBCF mais "lentement" si on les considère d'une façon plus générale. Par ailleurs, l'égalité des valeurs absolues (0,49) est fortuite.

Ce constat global d'une bonne concordance avec la formule simplifiée dans le classement des produits confirme que les prix relatifs et la croissance relative pour 96/95 constituent les deux facteurs prépondérants d'explication des écarts. L'exception des "matériels divers" pour la FBCF est également intéressante de ce point de vue : elle met en évidence le fort écart entre croissance à prix 80 et croissance à prix 95 (le troisième facteur qui semble ici prépondérant). Cet écart correspond en fait à une erreur détectée après le bouclage du compte (provisoire) et qui a été corrigée lors du compte semi-définitif 1.

Si l'on s'intéresse (brièvement) à la signification des contributions les plus marquantes, on retrouve des évolutions importantes de l'économie française :

- la contribution de l'informatique est forte pour le PIB (0,7 dixième) et surtout pour la FBCF (2,9 dixièmes soit plus de la moitié de l'écart à expliquer) du fait de la baisse considérable des prix relatifs sur longue période, couplée à une forte croissance de la demande. L'absence de prise en compte satisfaisante des effets qualité durant les années 80 tend en fait à en minimiser l'ampleur, ce qui peut expliquer pourquoi les écarts obtenus en France (3 dixièmes sur le PIB entre prix 80 et prix n-1) restent en définitive modérés malgré l'éloignement de l'année de base ;
- la contribution de l'agriculture (plus d'1 dixième sur le PIB) est plus spécifique à la France et à l'année 1996. En effet, elle résulte d'une production très abondante cette année là, notamment pour les céréales, et du fait qu'une valorisation aux prix de 80 ne prend pas en compte la forte baisse des prix intervenus depuis, en liaison avec la politique agricole commune (P.A.C).

## IV - La pertinence du chaînage

### *IV.1 Comment apprécier la pertinence du chaînage ?*

D'une façon quelque peu imprécise, la pertinence du chaînage entre deux dates provient du fait qu'il permet de capter l'évolution de la structure de l'économie, au contraire des comptes à prix constants. Mais on peut imaginer qu'entre deux dates, même éloignées, la structure d'arrivée soit voisine de celle de départ. Le chaînage est alors au mieux inutile. Au pire, il peut être néfaste si dans l'intervalle, la structure s'est éloignée avant de redevenir proche de son point de départ.

Ce problème est bien connu des spécialistes des indices de prix. Supposons qu'au cours du temps, la situation passe alternativement par 2 états différents : à chaque période paire elle redevient identique à ce qu'elle était à l'origine, et à chaque période impaire elle passe par le deuxième état. Si l'on calcule un indice de Laspeyres (ou de Paasche) en chaque période paire, l'indice sera bien égal à 1. Par contre, si l'on calcule un indice chaîné, l'indice divergera en s'écartant de plus en plus de 1 (en se restreignant aux périodes paires). Cet exemple peut théoriquement s'appliquer aux comptes nationaux puisque les comptes aux prix de l'année précédente sont, dans presque tous les pays et notamment en France, calculés en agrégeant les composantes (produits ou branches par exemple) à l'aide d'indices de Laspeyres pour les volumes et de Paasche pour les prix, de façon à assurer leur additivité.

L'intérêt du chaînage provient donc de ce que l'on suppose que la structure des dates intermédiaires est elle-même intermédiaire. L'utilisation du chaînage dans les calculs de parités de pouvoir d'achat entre deux pays montre bien que l'objectif est de trouver des points intermédiaires de façon à assurer au maximum la proximité de deux points successifs dans le chaînage.

Ceci est bien indiqué dans le SCN 93 qui précise que « Il ne faut pas utiliser d'indice chaîne de Laspeyres ou de Paasche si l'enchaînement s'assortit d'un détour économique... » (cf. paragraphe 16.47) et que « Inversement, il convient d'utiliser un indice chaîne quand les prix relatifs de la première et de la dernière période diffèrent beaucoup les uns des autres et que l'enchaînement fait intervenir des périodes intermédiaires où les prix et les quantités relatifs se situent entre ceux de la première et dernière période » (cf. paragraphe 16.48).

On s'attachera ici à définir un **chaînage** que l'on appellera « **optimal** », passant par les points (les dates intermédiaires), et uniquement ceux-ci, qui assurent que la situation évolue d'un point de la chaîne au suivant le plus progressivement, tout en se rapprochant de l'état final. Ce chaînage optimal peut le cas échéant s'identifier au chaînage habituel, que l'on peut qualifier d' « intégral » car passant par tous les points. Il peut aussi se confondre avec un calcul habituel sans chaînage (calcul à prix constants) lorsque aucune date intermédiaire n'est retenue. Dans beaucoup de cas, cependant, il passera par certaines dates mais en évitera d'autres.

Pour progresser dans cette direction, on voit qu'il faut commencer par définir **une mesure de l'éloignement d'un point par rapport à un autre**. On présentera la méthode que l'on propose à partir de l'exemple des valeurs ajoutées. On considère ainsi que l'on dispose pour l'ensemble des branches (au niveau de nomenclature le plus fin possible) des valeurs ajoutées aux prix courants et aux prix de l'année précédente. Concrètement, la question qui se pose est la suivante : pour évaluer l'évolution en volume de la valeur ajoutée totale entre deux dates plus ou moins éloignées, laquelle des deux méthodes faut-il appliquer ?

- calculer à chaque date la valeur ajoutée totale aux prix n-1 et effectuer ensuite le chaînage (Laspeyres chaîné)?

- chaîner la valeur ajoutée pour chaque branche détaillée et effectuer ensuite le total? Ceci constitue une méthode d'élaboration (plus ou moins approchée en fonction du détail de la nomenclature) des comptes à prix constants. L'évolution retenue est alors égale à un indice de Laspeyres.

Si en deux dates extrêmes la valeur ajoutée de chaque branche est la même, il faut alors considérer que l'éloignement d'une date vers l'autre est nul de telle sorte qu'aucun point ne puisse être déclaré comme décrivant une situation intermédiaire et qu'ainsi le chaînage soit rejeté. Mais on peut aller un peu plus loin en étendant cette exigence au cas où l'évolution de chaque branche est la même entre les deux dates. Il ne fait en effet aucun doute que l'évolution globale doit alors être égale à cette évolution commune, ce qui est bien obtenu en rejetant le chaînage. On voit par là que ce qui importe c'est en fait la permanence de la structure de la valeur ajoutée entre branches.

On s'intéressera donc, à une date donnée, aux rapports du type  $va/VA$ ,  $va$  représentant la valeur ajoutée d'une branche donnée et  $VA$  la valeur ajoutée globale. On prendra en fait pour  $VA$  la somme des valeurs absolues des valeurs ajoutées des différentes branches pour que ce ratio ne soit pas trop instable dans les cas où le total de l'agrégat serait voisin de zéro. Avec la valeur ajoutée, cette hypothèse paraît toute théorique, bien que la valeur ajoutée d'une branche puisse être négative (c'est toujours le cas pour les SIFIM), mais le cas peut se présenter concrètement pour d'autres agrégats, en particulier pour les variations de stocks (cf. point V).

Ces ratios peuvent être définis en valeur (aux prix courants) et en volume. Pour cela, on exprimera les valeurs ajoutées de la période de départ en volume aux prix de la période d'arrivée (prise comme cible), en chaînant chaque série, supposée élémentaire puisque l'on raisonne au niveau de nomenclature le plus fin possible. S'agissant d'un partage volume-prix, on s'attachera à définir l'éloignement du point de départ vers celui d'arrivée à la fois à partir des prix et des volumes.

Pour cela, plaçons-nous dans un espace mathématique ayant comme origine la date d'arrivée et comportant  $2n$  dimensions,  $n$  représentant le nombre de branches. La date de départ sera représentée par un point défini par ses  $2n$  composantes,  $n$  relatives aux volumes et  $n$  aux prix.

Pour une branche donnée, la composante sur l'axe des volumes sera prise égale à

$$(va/VA)_{t=dép} - (va/VA)_{t=arr} \quad (1)$$

où  $va$  et  $VA$  sont des volumes comme définis précédemment.

Pour définir la composante sur l'axe des prix, on repartira de l'expression (1). Celle-ci a été calculée avec des volumes mais on peut également la calculer avec des valeurs. On prendra comme composante prix, cette expression en valeur moins celle en volume, avec l'idée qu'il revient aux prix d'expliquer ce qui ne l'a pas été par les volumes.

Pour finir, il reste à définir l'éloignement du point de départ ainsi défini par rapport au point d'arrivée, lequel correspond à l'origine de notre espace. Plutôt que de prendre la distance euclidienne habituelle (la racine carré de la somme des carrés) nous prendrons comme distance la somme des valeurs absolues. Ce choix vient du fait que l'on veut s'assurer de la propriété suivante : si une branche est éclatée en deux sous-branches connaissant les mêmes évolutions, le résultat de notre calcul n'en est pas affecté (on doit supposer aussi que le signe de l'agrégat est le même pour les deux sous-branches).

**En définitive**, si l'on a deux dates 1 et 2, un agrégat X ventilé en n composantes (branches ou produits par exemple) notées i ou k, **on définira l'éloignement de 1 vers 2 par la formule suivante** :

$$E_{1,2} = \sum_i \left| \frac{\text{Vol}_i^1}{\sum_k \text{Vol}_k^1} \left| \frac{\text{Vol}_k^1}{\sum_k \text{Vol}_k^1} - \frac{\text{Vol}_k^2}{\sum_k \text{Vol}_k^2} \right| \right| + \sum_i \left| \left( \frac{\text{Val}_i^1}{\sum_k \text{Val}_k^1} \left| \frac{\text{Val}_k^1}{\sum_k \text{Val}_k^1} - \frac{\text{Val}_k^2}{\sum_k \text{Val}_k^2} \right| \right) - \left( \frac{\text{Vol}_i^1}{\sum_k \text{Vol}_k^1} \left| \frac{\text{Vol}_k^1}{\sum_k \text{Vol}_k^1} - \frac{\text{Vol}_k^2}{\sum_k \text{Vol}_k^2} \right| \right) \right|$$

avec Val = montant de l'agrégat en valeur;

Vol = montant de l'agrégat en volume au prix de la date 2.

On pourra remarquer que, par construction de la formule, lorsque la déformation de la structure des prix (2ème terme) va toujours dans le même sens que celle des volumes (1er terme), alors seule la déformation de la structure en valeur intervient. En effet, la 2ème partie du 2ème terme s'annule avec le 1er terme. Mais cela n'est pas le cas dès que prix et volumes se déforment dans des sens opposés pour au moins une composante. Or, dans l'économie, prix et volumes vont souvent en sens inverse...

Il faut également noter que l'application de cette formule nécessite de modifier le système de prix dès que l'on change de date d'arrivée, tous les volumes de la formule étant calculés aux prix de 2. La symétrie de la formule entre les dates 1 et 2 n'est donc qu'apparente ; en particulier  $E_{1,2}$  n'est pas égal à  $E_{2,1}$ , ce qui explique que l'on n'ait pas retenu le terme de « distance » entre 1 et 2. En fait, dans l'espace à 2n dimensions, le calcul de l'éloignement n'a d'intérêt que d'un point vers l'origine.

Après avoir ainsi défini l'éloignement entre deux dates quelconques, nous pouvons examiner le **problème du chaînage**. Considérons un agrégat ventilé en différentes composantes (branches ou produits par exemple), sur une période de  $t=1$  à  $T$ . On s'intéresse à l'évolution de cet agrégat entre ces deux dates extrêmes. Faut-il effectuer des calculs à prix constants (aux prix de  $T$ ) ou bien faut-il chaîner les évolutions de 1 à  $T$ ? ( $T$  peut en fait se situer avant 1).

Nous pouvons calculer l'éloignement de 1 vers  $T$  mais aussi l'éloignement de toute date intermédiaire  $t$  vers  $T$ , l'éloignement de toute date  $t$  vers  $t+1$  (ce qui oblige à chaque fois à changer de système de prix), et plus généralement de toute date  $t_1$  vers une autre date  $t_2$ . Afin de déterminer ce que l'on a appelé chaînage optimal, l'analyse menée précédemment nous conduit à retenir les deux critères suivants :

- les dates intermédiaires par lesquelles le chaînage doit passer doivent être telles que leur éloignement vers  $T$  est toujours décroissant. Les dates intermédiaires qui ne respectent pas cette décroissance doivent donc être éliminées.
- le maximum de l'éloignement d'un point de chaînage au point de chaînage suivant doit être minimal. Si l'éloignement de  $t_1$  vers  $t_3$  est plus petit que l'éloignement de  $t_1$  vers  $t_2$  ou que l'éloignement de  $t_2$  vers  $t_3$ , alors le point  $t_2$  doit être supprimé de la chaîne.

En pratique, l'application du premier critère conduit souvent à une solution qui satisfait au second. Mais il arrive parfois que le second critère conduise à supprimer de nouveau des points de chaînage : les situations à 2 dates successives peuvent être très éloignées l'une de l'autre, tout en se rapprochant de la situation en  $T$ .

Cette démarche ne peut conduire dans l'absolu à choisir de chaîner ou non. Sachant que les chaînages partiels définis précédemment semblent, de par la lourdeur qu'il y a

à les optimiser et à les calculer, condamnés à n'exister qu'à des fins d'analyse, il est nécessaire de les appliquer à des cas concrets variés, afin d'en dégager une conclusion méthodologique. Intuitivement, au plus l'agrégat évolue de façon régulière, au plus l'intérêt du chaînage est important. Les exemples suivant le confirment.

#### ***IV.2 Appliquée aux données de la base 95, cette méthode confirme largement la pertinence du chaînage intégral mais en fixe les limites.***

Les principales séries en volume sont disponibles, au moment de la rédaction de cette étude, pour la période 1978-1998. En dehors des années 90, il s'agit de séries rétopolées directement au niveau F des comptes (en 41 postes). On raisonnera donc à partir des séries correspondantes, publiées en valeur et en séries chaînées aux prix de 95, et l'on cherchera à savoir s'il convient de chaîner ou non afin de calculer, pour les séries agrégées, des volumes en prenant l'année 1995 comme référence. En particulier on s'intéressera au calcul de l'évolution sur l'ensemble de la période 1978-1995.

Parmi les agrégats pour lesquels le chaînage est effectivement réalisé (et disponible sur le site Internet de l'Insee), quatre ont été testés, choisis de façon à avoir des séries plus ou moins régulières. Le tableau 2, précisé par l'encadré 1, synthétise les résultats obtenus.

La dépense de **consommation des ménages** est traditionnellement l'une des séries qui évoluent le plus régulièrement. Il est satisfaisant de constater que le chaînage optimal, au sens que nous lui avons donné dans ce qui précède, est le chaînage intégral. Le tableau 2 montre en première colonne que l'éloignement de chaque année vers 1995 se réduit de façon continue de 1978 à 1995. En deuxième colonne, il apparaît qu'aucun des « maillons » d'une année à la suivante n'est très important. Il est dès lors logique que les calculs aboutissent à ce que le chaînage optimal passe par toutes les années ainsi que l'indique la troisième colonne. La **valeur ajoutée** est a priori un peu moins régulière. Le tableau 2 montre cependant que, même si les éloignements sont plus importants qu'avec la consommation, le chaînage optimal est encore le chaînage intégral.

La formation brute de capital fixe des sociétés non financières et entreprises individuelles (**FBCF des SNFEI**) subit quant à elle des fluctuations plus importantes. Le tableau 2 montre que le chaînage optimal s'écarte du chaînage intégral. Dans la première colonne, on constate que le rapprochement progressif vers 1995 n'est pas respecté pour 1992 et 1993, toutes les deux plus éloignées de 1995 que ne l'est 1991. Les calculs conduisent (troisième colonne) à ce que le chaînage optimal passe par toutes les années, à l'exception de 1992 et 1993, l'année 1991 n'étant éloignée que de 0.77 de 1994 (en fait 0.077 puisque le tableau indique 10 fois l'éloignement). L'examen de ces années permet de comprendre leur particularité : en 1992, la FBCF des SNFEI en bâtiment a augmenté extrêmement fortement (+ 18% en volume) du fait du passage d'actifs immobiliers des sociétés financières vers les sociétés non financières (politique de défaisance). Ce phénomène, dont la comptabilisation en FBCF est d'ailleurs critiquable, a également perturbé les évolutions 93/92 de la FBCF par secteurs institutionnels, alors que le bâtiment était par ailleurs atteint par la récession. Globalement, le tableau 2 donne tout de même l'impression qu'il est préférable, sur longue période, de chaîner intégralement que de ne pas chaîner du tout. Ceci est confirmé par le fait que, sur la période incriminée 1991-1994, chaîner en passant par toutes les années conduit à un résultat (-5.0%) qui ne s'écarte que très peu du calcul direct de l'évolution de 1994 par rapport à 1991 (-4.9%). Sur l'ensemble de la période 1978-1995, le résultat du chaînage intégral (+70.5%) est dès lors très proche de celui du chaînage optimal (+70.6%), alors que celui obtenu sans chaînage (+86.6%) en est très éloigné.

Le dernier agrégat est la dépense de **consommation des ménages en énergie**. Alors que les agrégats précédents étaient décomposés selon les 41 postes de la nomenclature activités-produits, il n'y a ici que 2 composantes : la consommation en combustibles et carburants d'une part, celle en eau, gaz et électricité de l'autre. Ces séries ont connu des à-coups très marqués, en particulier lors des chocs et contre-chocs pétroliers, comme le montrent les graphiques 2 et 3. Le tableau 2 montre que le chaînage n'est justifié qu'en dehors des périodes 1985-1989 et 1991-1994. Mais là encore, les écarts sont minimes sur ces périodes entre les 2 méthodes : sur 1985-1989, +3.1% sans chaîner, +3.2% en chaînant; sur 1991-1994, -0.7% dans les 2 cas. Globalement, sur 1978-1995, on obtient encore que le chaînage intégral (+21.4%) est nettement plus proche du chaînage optimal (+21.2%) que ne l'est le résultat obtenu sans chaîner (+22.2%).

#### Encadré 1 : Comment interpréter les tableaux 2 et 3?

Pour chacun des agrégats, la première colonne « n vers 1995 » indique l'éloignement, obtenu avec la formule présentée en 3, de chaque année vers l'année 1995 (dans la mesure où l'on veut exprimer des volumes en francs de 1995). Dans les « bons » cas, tels la consommation des ménages et la valeur ajoutée, cet éloignement diminue constamment lorsque l'on se rapproche de 1995. Les autres agrégats des tableaux fournissent cependant des contre-exemples : ainsi, pour la FBCF des SNF-EI, l'éloignement vers 1995 passe de 1.18 en 1991 à 1.53 en 1992.

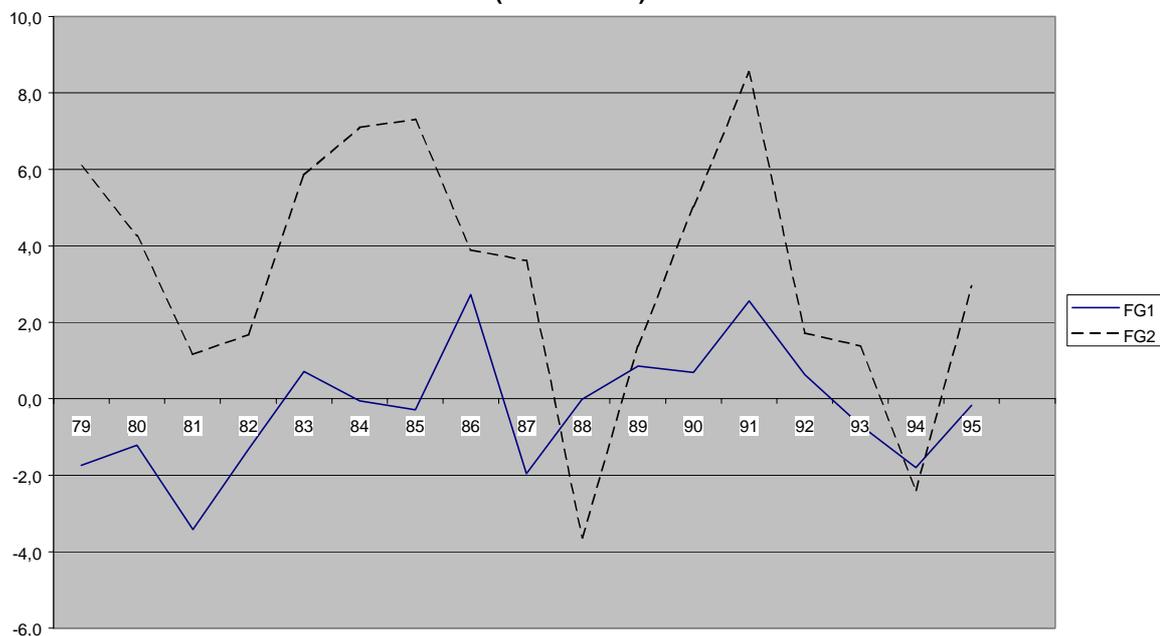
La deuxième colonne « n vers n+1 » indique l'éloignement de chaque année vers la suivante. C'est la longueur de chaque maillon dans le cas du chaînage intégral. Les valeurs indiquées pour les différentes années n'ont aucune raison de constituer une série monotone. Leur relative constance pour la consommation des ménages montre que la vitesse de déformation de la structure de consommation est régulière. Celle de la valeur ajoutée l'est un peu moins, ce qui n'empêche pas que le chaînage optimal soit le chaînage intégral, dans la mesure où la structure de la valeur ajoutée se déforme toujours dans le même sens.

La troisième colonne « chaînage optimal » n'est pas toujours complètement remplie. Les cases renseignées correspondent aux années retenues pour le chaînage optimal. Les valeurs indiquées représentent l'éloignement d'une année retenue vers l'année retenue suivante. C'est donc la longueur des maillons du chaînage optimal. On pourra vérifier qu'à chaque fois que l'éloignement vers 1995 augmente (en 1ère colonne, par exemple la FBCF en 1992) la case correspondante en 3ème colonne est vide, ce qui signifie que le chaînage optimal ne passe pas par cette année là. Les informations contenues dans ces tableaux ne suffisent cependant pas à déterminer à quelle date se situera le point de chaînage suivant. Sa détermination, du fait du deuxième critère indiqué en 3 (minimiser la longueur maximale des maillons) nécessite de disposer de l'ensemble des éloignements des couples de dates, et de rechercher le chemin optimal.

Les différentes valeurs de ces tableaux sont comparables entre elles à condition que les nomenclatures utilisées soient les mêmes. Ceci est le cas entre la consommation, la FBCF, la valeur ajoutée et les variations de stocks dans la mesure où l'on a utilisé à chaque fois les 41 niveaux de la nomenclature commune activités-produits (même si quelques différences minimales persistent, comme le regroupement du commerce en un seul produit contre 3 branches, la correction territoriale pour la consommation ou la branche des SIFIM pour la valeur ajoutée). Par contre, la consommation en énergie et le solde extérieur ne sont ventilés qu'en deux composantes, propres à chacun des deux agrégats (cf. corps de l'article), et les éloignements obtenus dans chaque cas ne sont pas comparables à ceux obtenus pour les autres agrégats.

**Graphique 2**

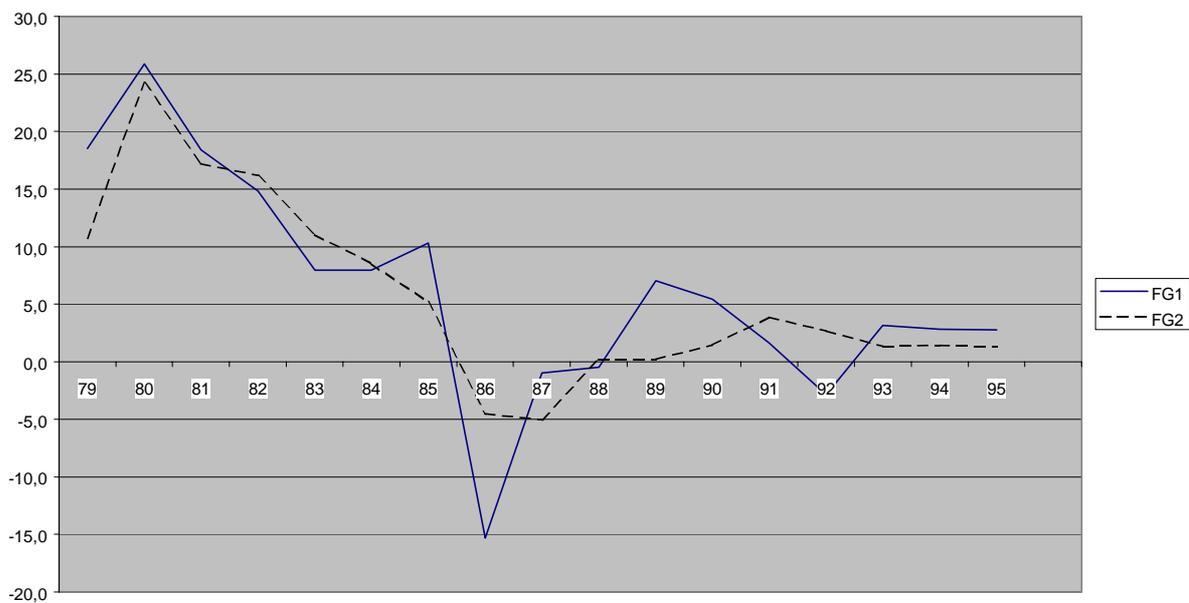
**Volume de dépenses de consommation des ménages en énergie  
(en % annuel)**



**Note :** FG1 = combustibles et carburants; FG2 = eau, gaz, électricité

**Graphique 3**

**Prix de la dépense de consommation des ménages en énergie  
en % d'une année sur l'autre**



**Note :** FG1 = combustibles et carburants; FG2 = eau, gaz, électricité

**Tableau 2 : Données d'éloignement**

Date n	Dépense de conso. des ménages			Valeur ajoutée			FBCF des sociétés non financières et entreprises indiv.			Dépense de conso. des ménages en énergie		
	n vers 1995	n vers n+1	chaîno ptim $n_i$ vers $n_{i+1}$	n vers 1995	n vers n+1	Chaîn optim $n_i$ vers $n_{i+1}$	n vers 1995	n vers n+1	chaîno ptim $n_i$ vers $n_{i+1}$	n vers 1995	n vers n+1	chaîno ptim $n_i$ vers $n_{i+1}$
1978	3.65	0.39	0.39	5.56	0.75	0.75	6.24	0.88	0.88	3.18	0.66	0.66
1979	3.45	0.55	0.55	5.05	0.92	0.92	5.59	0.92	0.92	2.52	0.30	0.30
1980	3.27	0.42	0.42	4.44	0.75	0.75	5.05	0.61	0.61	2.22	0.26	0.26
1981	3.05	0.41	0.41	3.90	0.63	0.63	4.68	0.51	0.51	2.05	0.19	0.19
1982	2.96	0.42	0.42	3.58	0.80	0.80	4.35	0.77	0.77	1.87	0.37	0.37
1983	2.64	0.44	0.44	3.20	0.65	0.65	3.88	0.78	0.78	1.77	0.36	0.36
1984	2.45	0.31	0.31	2.96	0.43	0.43	3.61	0.80	0.80	1.47	0.59	0.59
1985	2.32	0.49	0.49	2.83	0.67	0.67	3.06	1.00	1.00	1.00	0.65	0.27
1986	2.06	0.47	0.47	2.55	0.52	0.52	2.60	0.59	0.59	1.42	0.48	
1987	1.79	0.38	0.38	2.27	0.48	0.48	2.27	0.39	0.39	0.94	0.21	
1988	1.58	0.38	0.38	1.97	0.46	0.46	1.95	0.43	0.43	1.15	0.35	
1989	1.42	0.37	0.37	1.86	0.51	0.51	1.73	0.51	0.51	0.80	0.39	0.39
1990	1.22	0.39	0.39	1.58	0.48	0.48	1.41	0.44	0.44	0.72	0.39	0.39
1991	0.93	0.37	0.37	1.29	0.53	0.53	1.18	0.92	0.77	0.32	0.33	0.24
1992	0.72	0.36	0.36	1.00	0.65	0.65	1.53	0.63		0.46	0.20	
1993	0.51	0.37	0.37	0.82	0.48	0.48	1.37	0.61		0.26	0.10	
1994	0.26	0.26	0.26	0.59	0.59	0.59	0.87	0.87	0.87	0.23	0.23	0.23
1995	0.00		0.00	0.00		0.00	0.00		0.00	0.00		0.00

**Note** : les valeurs indiquées représentent 10 fois l'éloignement calculé.

**En conclusion**, il est satisfaisant de constater que pour chacune des séries examinées, même les plus irrégulières, le chaînage est globalement justifié, du moins lorsqu'il s'agit de l'agrégation de montants établis au niveau 41 (l'étude à un niveau plus fin n'ayant pu être effectuée). En particulier, on constate que les chocs pétroliers (sur la période examinée : 2ème choc et contre-choc de 86) n'ont pas d'incidence sur la validité du chaînage. Le cas échéant, il peut arriver cependant que l'on ait des doutes sur la pertinence du chaînage d'une série. On peut alors appliquer la méthode proposée pour choisir ou non de chaîner, voire pour appliquer le chaînage partiel jugé optimal. Mais il faut alors garder en mémoire que celui-ci est propre à la donnée des points de départ et d'arrivée : l'évolution « optimale » entre 2 dates n'est pas donnée par le quotient des évolutions « optimales » entre chacune des 2 dates et l'année 1995 par exemple. Ainsi, l'évolution de la FBCF des SNF-EI entre 1990 et 1993 n'est pas égale à celle entre 1990 et 1995 divisée par celle relative à 1993-1995 car le chaînage optimal ne passe pas par 1993. La notion de série s'estompe quelque peu...

#### ***IV.3 Le cas particulier du solde extérieur et des variations de stocks***

Certains agrégats sont généralement considérés comme n'étant pas susceptibles d'être chaînés (et de fait, ne le sont pas dans nos comptes). On examinera le cas du solde extérieur (exportations moins importations), lequel n'est pas explicitement calculé dans nos comptes, et les variations de stocks utilisateurs (ou stocks de matières). Ces deux exemples présentent naturellement la particularité de correspondre à une différence de deux termes grossièrement du même ordre et donc de présenter des fluctuations très importantes impliquant des changements de signe fréquents.

En ce qui concerne le **solde extérieur**, dans le cadre de la méthode proposée précédemment, il peut être considéré comme ayant deux composantes : l'une positive

égale aux exportations, l'autre négative égale à moins les importations. Dans ce cadre, l'application d'un indice de Laspeyres non chaîné correspond au calcul du solde des exportations chaînées moins les importations chaînées. C'est en général la solution adoptée. Par contre, l'application du chaînage revient à calculer pour chaque année le solde avant de chaîner.

Le tableau 3, réalisé sur le même modèle que le tableau 2 décrit précédemment, montre que jusqu'au début des années 90 le chaînage n'est pas souhaitable, notamment par le fait que l'éloignement vers 1995 est fluctuant et que d'une façon générale, les années intermédiaires ne correspondent pas à des situations intermédiaires. La méfiance vis à vis du chaînage est donc justifiée et celui-ci doit être a priori rejeté. Cependant, depuis 1990 la France est entrée dans une période de croissance assez régulière de son commerce extérieur, ce qui permettrait de chaîner directement son solde : le chaînage intégral est proche du chaînage optimal.

**Tableau 3 : Données d'éloignement**

date n	Solde extérieur			Variations de stocks utilisateurs		
	n vers 1995	n vers n+1	Chaînoptim $n_i$ vers $n_{i+1}$	n vers 1995	n vers n+1	chaînoptim $n_i$ vers $n_{i+1}$
1978	0.54	0.23	0.31	15.80	10.87	12.71
1979	0.62	0.45		19.13	9.29	
1980	0.88	0.53		17.38	13.55	
1981	0.86	0.17		20.41	12.48	
1982	1.03	0.40		18.86	8.00	
1983	0.63	0.22		20.82	9.37	
1984	0.73	0.15		15.93	8.77	
1985	0.58	0.80		17.35	12.94	
1986	0.38	0.23		17.33	13.53	
1987	0.56	0.05		18.25	7.30	
1988	0.52	0.18		17.76	8.36	
1989	0.52	0.05	0.10	12.36	11.55	12.36
1990	0.54	0.15		16.28	11.97	
1991	0.42	0.24	0.24	18.60	14.69	
1992	0.18	0.24	0.24	27.23	24.09	
1993	0.06	0.06	0.06	16.51	13.57	
1994	0.02	0.02	0.02	16.64	16.64	
1995	0.00		0.00	0.00		0.00

**Note :** les valeurs indiquées représentent 10 fois l'éloignement calculé.

Le cas des **variations de stocks** est plus délicat encore et présente aussi une importance concrète bien plus grande. On reprendra ici l'analyse en 41 produits. Comme on pouvait s'y attendre, l'éloignement d'une date vers une autre ne semble pas dépendre de leur éloignement temporel ; la première colonne du tableau 3 en donne un aperçu. Le chaînage est alors à proscrire tel quel et l'établissement de séries à prix constants est préférable.

L'établissement de séries de variations de stocks en volume pose en fait des problèmes spécifiques d'au moins deux ordres :

- des fluctuations très fortes, avec des changements de signes et des passages éventuels par des montants voisins de zéro. Ce premier point est, au moins en partie, à relier à ce qui a été constaté précédemment.
- la difficulté qu'il y a à maîtriser les indices de prix, produit par produit, du fait que les variations de stocks constituent des postes privilégiés d'ajustement, en valeur comme en volume aux prix de l'année précédente. On peut ainsi avoir certaines années des variations de stocks voisines de zéro en valeur et volume mais de signes opposés. Au niveau agrégé, le prix implicite des variations de stocks est encore plus problématique. L'agrégation des variations de stocks de deux produits peut conduire à un prix implicite négatif alors que chacun des deux prix apparaît tout

à fait normal. (Par exemple : 10 en valeur et 10 en volume pour le produit 1; -10.1 en valeur et -9.9 en volume pour le produit 2.)

Combinés, ces deux problèmes peuvent entraîner des phénomènes explosifs en cas de chaînage. L'encadré 2 illustre cette question, en partant de chiffres réels.

Dans la base 95, ces problèmes ont été traités en appliquant une méthode originale que l'on peut qualifier de chaînage additif avec un contrôle des indices de prix.

La **formule adoptée en base 95**, aux différents niveaux de la nomenclature, est la suivante :

$$VS_{95}(n+1) = VS_{95}(n) + [VS_{vol}(n+1) - VS(n)]/Prix(n/95)$$

où  $VS_{95}$  représente la série aux prix de 95 que l'on souhaite établir (on prend  $VS_{95}(95) = VS(95)$ );

$VS(n)$  représente les variations de stocks de l'année n aux prix courants;

$VS_{vol}(n+1)$  représente les variations de stocks de l'année n+1 en volume aux prix de l'année précédente;

$Prix(n/95)$  représente l'évolution des prix entre l'année 95 et l'année n, des consommations intermédiaires du même poste de la nomenclature en produits s'il s'agit de calculer les variations de stocks utilisateurs, de la production pour les stocks producteurs et de travaux en cours, de l'ensemble des emplois finals hors stocks pour les stocks chez les commerçants.

Pour les variations de stocks totales (utilisateurs, producteurs et commerces), la série est calculée (en base 95) comme somme des séries établies pour chacun des types de stocks.

Si les prix utilisés étaient les prix des variations de stocks, la formule utilisée serait équivalente à la formule de chaînage habituelle. Ce qui fait que cette formule n'est pas explosive, c'est donc bien le contrôle des indices de prix retenus. La formule  $VS_{95}(n) = VS(n)/Prix(n/95)$  avec les mêmes prix contrôlés présenterait de ce point de vue le même avantage et serait plus simple. Cependant, elle ne fait pas intervenir du tout les variations de stocks aux prix de l'année précédente, à l'inverse de celle retenue. En particulier, elle ne permettrait pas de retrouver pour 1996 le montant en volume aux prix de l'année précédente, alors qu'avec la formule adoptée en base 95, on a bien  $VS_{95}(96)$  égal à  $VS_{vol}(96)$ .

Le tableau 5 permet, pour l'ensemble des variations de stocks, de comparer la série de la base 95, calculée comme indiqué ci-dessus, avec une série obtenue par chaînage (intégral). La série en valeur (prix courants) y figure également. Le chaînage intégral aboutit pour le début de la série (années 78 à 80) à des variations de stocks d'une ampleur déraisonnable ( 320 milliards de francs, soit 5.6% du PIB en 1979) alors que la série de la base 95 paraît beaucoup plus logique.

### Encadré 2 : Les risques du chaînage des variations de stocks

On présentera ici l'exemple, qui n'a rien d'exceptionnel, du produit T07 de la base 80. Ce poste correspond au niveau 40 de la nomenclature. Il rassemble trois produits de niveau 90 (noté S) : S09 minerai de fer; S10 produits de la sidérurgie; S11 première transformation de l'acier.

Le tableau 4 ci-dessous fournit les montants de variations de stocks utilisateurs (stocks de matières) sur la période 1990-1993. On cherchera ici à évaluer des volumes aux prix de 1990. Pour chaque produit, le tableau indique les montants en valeur (prix courants) et en volume au prix de l'année précédente. A partir de ceux-ci, il a été calculé des séries chaînées (notées VS prix 90 chaînage) et des séries (notées VS base 95) obtenues en appliquant la formule retenue en base 95 telle qu'indiquée dans le corps du texte (avec des prix 90 et non 95). Ceci a été réalisé pour les produits S09, S10 et S11, ainsi que pour le produit T07 pris globalement (rubrique « T07 direct »). La rubrique « T07 = S09+S10+S11 », laquelle correspond aux comptes de la base 80, permet de comparer le chaînage au niveau S ensuite agrégé avec le chaînage direct au niveau T.

Enfin, la rubrique « variante S09 » présente les résultats auxquels on aboutirait si en 1991, le montant en valeur avait été pris égal à 1 million de francs au lieu de 3, sans modification du volume aux prix de l'année précédente. Cette modification est en soit extrêmement minime et pourrait provenir d'un petit ajustement de l'équilibre du produit en valeur.

**Tableau 4 : Variations de stocks utilisateurs**

	1990	1991	1992	1993
(en millions de francs)				
<b>S09</b>				
VS valeur	175	3	-78	-128
VS volume n-1	186	3	-82	-133
VS prix90 chaînage	175	3	-82	<b>-140</b>
VS prix90 formule base95	175	3	-73	<b>-125</b>
<b>S10</b>				
VS valeur	-2173	-681	-701	-1411
VS volume n-1	-2261	-761	-719	-1428
VS prix90 chaînage	-2173	-761	-803	<b>-1637</b>
VS prix90 formule base95	-2173	-761	-803	<b>-1637</b>
<b>S11</b>				
VS valeur	1752	493	-2718	-2407
VS volume n-1	1780	491	-2820	-2456
VS prix90 chaînage	1752	491	-2809	<b>-2538</b>
VS prix90 formule base95	1752	491	-2907	<b>-2628</b>
<b>T07 direct</b>				
VS valeur	-246	-185	-3497	-3946
VS volume n-1	-295	-267	-3621	-4017
VS prix90 chaînage	-246	-267	-5226	<b>-6003</b>
VS prix90 formule base95	-246	-267	-3998	<b>-4579</b>
<b>T07 = S09+S10+S11</b>				
VS prix90	-246	-267	-3694	<b>-4314</b>
VS prix90 formule base95	-246	-267	-3783	<b>-4390</b>
<b>variante S09</b>				
VS valeur	175	1	-78	-128
VS volume n-1	186	3	-82	-133
VS prix90 chaînage	175	3	-246	<b>-419</b>
VS prix90 formule base95	175	3	-71	<b>-123</b>

Deux problèmes apparaissent avec le chaînage habituel (lignes VS prix 90 chaînage) :

- Phénomène d'explosion : en 1993, pour S09, on aboutit à -140 MF, mais à -419 MF avec la variante ayant modifié la valeur de 2 MF en 1991.
- Sensibilité par rapport au niveau auquel on effectue le chaînage : le chaînage direct conduit à une estimation de -6003 MF pour T07 en 1993, alors que le chaînage au niveau S aboutit, pour T07, à -4314 MF.

Avec la formule établie pour la base 95, ces problèmes semblent effacés :

- La variante sur S09 ne fait passer que de -125 MF à -123 MF.
- Le chaînage direct au niveau T (-4579 MF) n'est pas très différent de la somme des chaînages de niveau S (-4390 MF).

On peut constater par ailleurs que lorsqu'il n'y a pas de problème particulier (cas des produits S10 et S11) les résultats obtenus sont assez voisins du chaînage habituel : en 1993, -2628 MF contre -2538 MF pour le S11; -1637 MF dans les deux cas pour le S10. Avec ce dernier, on voit que la formule de la base 95 est équivalente à celle du chaînage habituel si les variations de stocks en valeur et volume aux prix de l'année précédente correspondent aux prix des consommations intermédiaires du même produit. Enfin, on peut constater qu'en 1991, la formule de la base 95 aboutit au montant du volume au prix de l'année précédente.

**Tableau 5 : Variations de stocks totales**

(en millions de francs)

années	volume aux prix de 1995 (comptes de la base 95)	volume aux prix de 1995, chaînage intégral	valeur (comptes de la base 95)
1978	34312	180072	16275
1979	60086	319550	31577
1980	58525	302184	33987
1981	-13408	-60051	-6424
1982	17763	115979	13194
1983	-11342	-63150	-7595
1984	-5070	-16164	-2130
1985	-16314	-85349	-11913
1986	-3487	-5072	4653
1987	-2357	-6697	6027
1988	25921	-33494	30456
1989	39314	-46228	43676
1990	41418	-48331	45994
1991	25430	-32639	27753
1992	2665	-6868	-11042
1993	-83612	-58487	-88427
1994	-14658	-14236	-14142
1995	28910	28910	28910
1996	-16858	-16858	-19367
1997	-196	-2129	-1530
1998	29759	40512	27847

En définitive, le problème des séries de variations de stocks en volume reste une zone d'ombre à la fois dans les recommandations et la connaissance des pratiques internationales. Les comptables nationaux français ont essayé dans la base 95 d'apporter une réflexion nouvelle. Mais ils ont bien conscience que le problème reste ouvert. Son acuité et son importance concrète justifieraient d'en faire un sujet d'étude privilégié.

#### IV.4 Le problème du chaînage des séries agricoles

En ce qui concerne les séries agricoles, l'idée a déjà été avancée depuis longtemps que les évolutions économiques qu'elles retracent peuvent être brusques et relativement erratiques, et qu'en conséquence le chaînage peut ne pas être souhaitable. Ainsi, dans un document d'Eurostat de 1991 écrit par des chercheurs de l'INRA [8], on apprend qu'entre 1975 et 1976, le volume de production de pommes de terre a chuté de 36% en France, entraînant plus d'un doublement des prix, à la suite de quoi l'année 1977 a vu ce volume augmenter de 85% (d'autres exemples très significatifs peuvent être donnés, y compris sur une période récente). On peut y lire par ailleurs que : « Agriculture is not the best sector for the application of chain indices, and fixed-weight indices may provide a better approximation » (les auteurs recommandent en fait d'utiliser des indices de type Fischer ou Tornqvist, faisant intervenir de façon symétrique les deux dates extrêmes).

On a alors testé les séries de production agricole avec l'idée de savoir si elles recouvrent une spécificité telle que les conclusions générales sur l'intérêt du chaînage ne s'y appliquent pas. Les résultats présentés ci-après confirment la forte spécificité des séries de productions agricoles et tendent à bannir le chaînage en ce qui les concerne.

##### a) Premiers résultats sur séries agricoles

La rétopolation effectuée par la division Agriculture, dans le cadre européen des comptes économiques de l'agriculture, permet de disposer de séries très longues à un niveau fin. On a ainsi raisonné sur les séries 1959-1999 de productions agricoles du compte économique de l'agriculture. La production agricole y est désagrégée en 28 produits correspondant plus ou moins au niveau H des comptes du cadre central.

La question du chaînage du volume de la production agricole totale a été examinée d'une part sur l'ensemble de la période, entre 1959 et 1999, et d'autre part sur la période 1970 – 1990. Le tableau 6 présente les résultats.

**Tableau 6 : Volume de production agricole**

	1959 – 99		1970 – 90	
	indice d'évolution	années intermédiaires écartées	indice d'évolution	années intermédiaires écartées
« Chaînage optimal »	2.006	60-61-63-65-66-67-71-72-74-75-76-77-78-80-81-83-84-85-90-91	1.420	71-72-74-75-76-77-78-81-83-84-85
Chaînage (intégral)	2.179	aucune par définition	1.478	aucune par définition
prix constants (base fixe début de période)	2.057	toutes par définition	1.410	toutes par définition

Dans les deux cas, on observe que le résultat à prix constants est nettement plus proche de celui du « chaînage optimal » que ne l'est celui du chaînage (intégral), même si l'écart peut être relativement important.

##### b) Examen comparatif avec des séries industrielles

Les résultats indiqués dans le paragraphe précédent sont très différents de ceux obtenus dans l'étude indiquée au point 1. Ceci peut provenir a priori de deux raisons différentes :

- une forte spécificité liée aux fluctuations de l'économie agricole ;
- la finesse des séries, puisqu'il s'agit de séries au moins aussi fines que celle de niveau H (472) des comptes nationaux, alors que l'étude précédente avait été conduite au niveau G (118) qui est celui de la synthèse du tableau-entrées-sorties. Or, on peut imaginer que cette finesse peut être elle-même à l'origine du caractère plus erratique des séries.

Pour trancher entre ces différentes possibilités, une étude similaire a été réalisée sur certaines séries industrielles fines. Le fait de devoir disposer de séries suffisamment longues a obligé à nous orienter vers des séries de la base 80, mais cela ne devrait gêner les comparaisons avec les séries agricoles déjà présentées. On a voulu choisir d'une part des séries de production de biens de consommation et d'autre part des séries de production de biens d'équipement. De façon à avoir des nombres de séries comparables à l'agriculture, on a retenu le textile-habillement (T18 comportant 38 séries de niveau « 600 ») et la construction mécanique (T14 comportant 29 séries de niveau « 600 »). Ces séries sont disponibles sur la période 1978-97<sup>1</sup>.

Le tableau 7 fournit les résultats sur la période 1978-1997, de nouveaux calculs ayant été effectués sur cette période avec les séries de production agricole déjà présentées. Pour consolider les résultats, des calculs similaires, présentés dans le tableau 8, ont été effectués sur la période 1980-1995. Des dates proches peuvent en effet conduire à des résultats très différents lorsque les séries sont fluctuantes.

**Tableau 7 : Production en volume entre 1978 et 1997**

	Agriculture		Textile-habillement		Construction mécanique	
	indice d'évolution	années intermédiaires écartées	indice d'évolution	années intermédiaires écartées	indice d'évolution	années intermédiaires écartées
« Chaînage optimal »	1.314	80-81-83-84-85-90-91	0.848	81-83	1.146	86-93
Chaînage (intégral)	1.331	aucune par définition	0.846	aucune par définition	1.148	aucune par définition
Prix constants (base fixe début de période)	1.317	toutes par définition	0.856	toutes par définition	1.150	toutes par définition

**Tableau 8 : Production en volume entre 1980 et 1995**

	Agriculture		Textile-habillement		Construction mécanique	
	indice d'évolution	années intermédiaires écartées	indice d'évolution	années intermédiaires écartées	indice d'évolution	années intermédiaires écartées
« Chaînage optimal »	1.180	81-83-84-85-90-91-92-93	0.878	93	1.066	aucune
Chaînage (intégral)	1.196	aucune par définition	0.878	aucune par définition	1.066	aucune par définition
Prix constants (base fixe début de période)	1.183	toutes par définition	0.888	toutes par définition	1.067	toutes par définition

<sup>1</sup> Je remercie Gilles Laguerre qui a eu la gentillesse d'extraire les séries d'ERE correspondantes et de me les fournir sous Excel.

Dans tous les cas, on observe que :

- pour les productions industrielles (textile-habillement et construction mécanique), le chaînage (intégral) est plus proche du « chaînage optimal » que ne l'est le calcul à prix constants. Ceci tend à confirmer l'étude indiquée précédemment, réalisée à partir de séries plus agrégées, et donc pour lesquelles l'hypothèse d'homogénéité des séries était plus critiquable. On peut juste remarquer que les résultats numériques obtenus, s'ils conduisent sans ambiguïté à recommander de chaîner, sont cependant moins flagrants sur les séries fines testées ici.
- pour la production agricole, le constat est inverse (sur les deux périodes examinées dans les tableaux 7 et 8, mais aussi sur les deux autres périodes examinées dans le tableau 1). Le chaînage (intégral) donne des résultats plus éloignés du « chaînage optimal » que le calcul à prix constants.

**En conclusion**, il semble donc bien confirmé que les séries de production agricole connaissent des fluctuations suffisamment importantes pour que le chaînage ne se soit pas opportun.

## V - Bibliographie

- [1] « Les comptes nationaux français en volume aux prix d'une année fixe et aux prix de l'année précédente. Ecart entre les indices d'évolution dans les deux systèmes de prix. » Jean-Pierre Berthier, in Comptabilité Nationale - Nouvelles frontières. Economica 1999.
- [2] « Pertinence et mise en œuvre des séries chaînées » Jean-Pierre Berthier, in Comptabilité Nationale. Nouveau système et patrimoines. Economica 2001
- [3] L'indice des prix à la consommation surestime-t-il l'inflation ? F. Lequiller. Economie et Statistique N° 303 INSEE 1997.
- [4] Système élargi de comptabilité nationale. Chapitre 10 : comptes à prix constants. N° 549-550 des collections de l'INSEE. 1987.
- [5] Base 95 Les prix chaînés (note de base N°12). Gilles Laguerre. Novembre 2000.
- [6] System of National Accounts (S.C.N.93). Chapitre 16 : Price and volume measures.
- [7] Système européen des comptes. (S.E.C 95). Chapitre 10 : La mesure des prix et des volumes.
- [8] Generation and distribution of productivity increases in European agriculture 1967-1987. Eurostat 1991.



## VI - ANNEXE : Démonstration du résultat indiqué au point II 2

La démonstration de ce que la fonction

$$C_i = b_i (r_i(b)-R) - a_i (r_i(a)-R) \quad \text{avec } R = \frac{1}{2} (R(a)+R(b))$$

vérifie les propriétés (1) à (5) ne pose aucune difficulté, et l'on se contentera ici de donner les principaux éléments de la démonstration de ce que le respect de (1) à (5) entraîne nécessairement cette expression.

1) A partir de la propriété (2), par récurrence on peut agréger toutes les autres composantes et faire apparaître  $R(a)$  et  $R(b)$  :

$$C_i = f(a_i, b_i, 1-a_i, 1-b_i, r_i(a), r_i(b), (R(a)-a_i r_i(a))/(1-a_i), (R(b)-b_i r_i(b))/(1-b_i))$$

ce qui peut s'écrire  $C_i = g(a_i, b_i, r_i(a), r_i(b), R(a), R(b))$  où  $g$  est continue.

2) Des propriétés (1) et (2), on déduit celle d'agrégativité externe (additivité des contributions) :

Supposons par exemple que l'on veuille calculer la contribution  $C_{1+2}$  de l'agrégation des composantes 1 et 2.

On considère donc  $n-1$  composantes, les 2 premières n'en formant plus qu'une. D'après le principe (2), les composantes  $C_3, \dots, C_n$  n'ont pas changé. Mais d'après (1) on peut alors calculer  $C_{1+2} = R(b) - R(a) - C_3 \dots - C_n$

et donc  $C_{1+2} = C_1 + C_2$ .

D'une façon générale, la contribution de l'agrégation de plusieurs composantes est égale à la somme de leurs contributions.

3) En prenant le cas où  $r_i(a) = r_j(a)$  et  $r_i(b) = r_j(b)$ , et en supposant fixées ces valeurs ainsi que  $R(a)$  et  $R(b)$ ,  $C_i$  n'est plus fonction que de  $a_i$  et  $b_i$  et l'on a d'après le point 2) :

$$g(a_i+b_i, a_i+b_i) = g(a_i, b_i) + g(a_i, b_i)$$

puisque l'agrégation de  $i$  et  $j$  ne change pas  $R(a)$  ni  $R(b)$ , et que les évolutions de  $i+j$  sont égales aux évolutions communes de  $i$  et  $j$ .

$g$  est donc une fonction linéaire de  $R^2$  dans  $R$ . Comme par ailleurs c'est une fonction continue,  $g$  est de la forme

$$g = k_a a_i + k_b b_i$$

les « constantes »  $k$  étant fonctions des paramètres supposés fixes précédemment :

$$k_a = k_a(r_i(a), r_i(b), R(a), R(b)) \quad \text{et} \quad k_b = k_b(r_i(a), r_i(b), R(a), R(b)).$$

4) Montrons que si  $b_i$  (resp.  $a_i$ ) est nul, alors  $C_i$  est indépendant de  $r_i(b)$  (resp.  $r_i(a)$ ).

Prenons le cas où  $n=3$  et notons 1 la composante dont le poids  $b$  est nul ( $b_1 = 0$ ).

Considérons une évolution  $r'_1(b)$  différente de  $r_1(b)$ , et notons  $C'_i$  au lieu de  $C_i$  les contributions lorsque l'on change  $r_1(b)$  en  $r'_1(b)$ .

D'après (2), en agrégeant 1 et 3, on obtient que  $C_2 = C'_2$  puisque  $r'_{1+3}(b)$  et  $r_{1+3}(b)$  sont tous les deux égaux à  $r_3$ .

De même, en agrégeant 1 et 2, on obtient que  $C_1 = C'_1$ .

D'après (1), on en déduit alors  $C_1 = C'_1$ , c'est à dire le résultat recherché.

Dans le cas général,  $n$  est différent de 3, mais l'on peut s'y ramener en agrégeant certaines composantes lorsque  $n$  est plus grand, en « éclatant » la deuxième composante si  $n=2$ . Le cas  $n=1$  est impossible car la somme des  $b_i$  doit être égale à 1.

5) Dans l'expression établie en 3), on obtient (d'après 4) en faisant  $a_i = 0$  ou  $b_i = 0$  que

$$k_a = k_a(r_i(a), R(a), R(b)) \text{ et } k_b = k_b(r_i(b), R(a), R(b)).$$

6)  $R(a)$  et  $R(b)$  étant fixés,  $k_a$  et  $k_b$  ne sont plus fonction que de  $r_i(a)$  ou  $r_i(b)$ .

En utilisant le fait que  $C_i + C_j = C_{i+j}$  démontré en 2), on obtient que

$$k_a(\lambda r_i(a) + \mu r_j(a)) = \lambda k_a(r_i(a)) + \mu k_a(r_j(a)) \text{ avec } \lambda = a_i/(a_i+a_j) \text{ et } \mu = 1-\lambda.$$

et de même pour  $k_b$ .

$k_a$  et  $k_b$  sont donc des fonctions affines en  $r_i$  (étant à la fois concaves et convexes), et donc

$$k_a = k_{a1}(R(a), R(b)) (r_i(a) + k_{a2}(R(a), R(b)))$$

$$k_b = k_{b1}(R(a), R(b)) (r_i(b) + k_{b2}(R(a), R(b))).$$

7) Montrons alors que  $C_i$  peut s'écrire sous la forme  $b_i (r_i(b) + k(R(a), R(b))) - a_i (r_i(a) + k(R(a), R(b)))$ .

$R(a)$  et  $R(b)$  étant donnés, plaçons-nous dans le cas où toutes les composantes ont les mêmes caractéristiques : évolutions donc égales à  $R(a)$  et  $R(b)$  et poids égaux à  $1/n$ .

Les expressions établies précédemment conduisent immédiatement à :

$$C_i = 1/n k_{a1}(R(a), R(b)) (R(a) + k_{a2}(R(a), R(b))) + 1/n k_{b1}(R(a), R(b)) (R(b) + k_{b2}(R(a), R(b))).$$

Mais d'après (1), la somme des  $C_i$  doit être égale à  $R(b) - R(a)$ . Ceci conduit donc à :

$$k_{a1}(R(a), R(b)) (R(a) + k_{a2}(R(a), R(b))) + k_{b1}(R(a), R(b)) (R(b) + k_{b2}(R(a), R(b))) = R(b) - R(a)$$

ceci quel que soit  $R(a)$  et  $R(b)$ .

Il vient donc (en faisant  $R(a) = 0$  puis  $R(b) = 0$ ):

$$k_{b1}(R(a), R(b)) = 1;$$

$$k_{a1}(R(a), R(b)) k_{a2}(R(a), R(b)) + k_{b1}(R(a), R(b)) k_{b2}(R(a), R(b)) = 0;$$

$$k_{a1}(R(a), R(b)) = -1.$$

d'où l'on déduit :  $k_{a2}(R(a), R(b)) = k_{b2}(R(a), R(b))$ , que l'on notera  $k(R(a), R(b))$ .

En reportant dans les expressions précédentes, on obtient :

$$C_i = b_i (r_i(b)+k(R(a),R(b))) - a_i (r_i(a)+ k(R(a),R(b))).$$

**Cette expression n'a été obtenue qu'à partir des hypothèses (1) et (2). Les propriétés (3) à (5) vont servir maintenant à calculer  $k(R(a), R(b))$ .**

8) Montrons que  $k(R(a),R(b)) = k(R(b), R(a))$ .

D'après (3), on a  $-C_i = a_i (r_i(a)+k(R(b),R(a))) - b_i (r_i(b)+ k(R(b),R(a)))$ .

En ajoutant terme à terme avec l'expression donnant  $C_i$ , on obtient que :

$$(b_i - a_i)(k(R(a), R(b)) - k(R(b), R(a))) = 0, \text{ ceci quelque soient } a_i \text{ et } b_i.$$

d'où  $k(R(a), R(b)) = k(R(b), R(a))$ .

9) Montrons enfin que  $k(R(a), R(b)) = -\frac{1}{2} (R(b)+R(a))$ , ce qui achèvera la démonstration.

Par commodité, on notera ici  $x$  et  $y$  les évolutions globales  $R(a)$  et  $R(b)$ .

D'après l'expression obtenue pour  $C_i$ , on a  $\lambda C_i = \lambda [b_i (r_i(b)+k(x,y)) - a_i (r_i(a)+ k(x,y))]$ .

Mais d'après (4), on a aussi :

$$b_i (\lambda r_i(b)+k(\lambda x,\lambda y)) - a_i (\lambda r_i(a)+ k(\lambda x,\lambda y))] = \lambda C_i.$$

On en déduit que  $k(\lambda x,\lambda y) = \lambda k(x,y)$ .

D'autre part, de l'hypothèse (5) on déduit de façon analogue que :

$$k(x+\delta,y+\delta) = k(x,y) - \delta.$$

On peut alors écrire que  $k(x,y) = k(x-y,0) - y = (x-y) k(1,0) - y$ .

De même :  $k(y,x) = (y-x) k(1,0) - x$ .

Mais d'après 8) on a  $k(x,y)=k(y,x)$ , d'où l'on tire que  $k(1,0) = -1/2$  et finalement  $k(x,y) = -1/2 (x+y)$ .

CQFD.

